

Force 5*

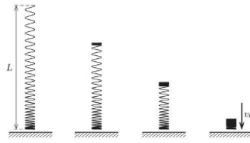
Victor Bastos†

(Dated: Maio 2019)

I. BRINQUEDO DE ADULTO

A. Slinky Caindo

Considere uma "Slinky" (brinquedo mostrado na figura) de massa m que inicialmente estava no chão, com comprimento zero. Não desconsidere os efeitos gravitacionais. Obs: Para $n \gg 1$ e natural, $\sum n^v = \int n^v dn$



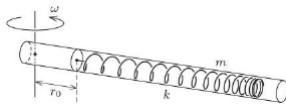
a) Supondo que alguém a levantou até que ela tivesse um comprimento L , calcule o trabalho realizado para esticá-la dessa forma.

b) Se a parte superior da Slinky é solta, curiosamente, a parte inferior não se move até haver o colapso. Calcule a velocidade da Slinky imediatamente depois de colapsar, como mostrado na última figura.

c) Quanto tempo a Slinky demora para colapsar?

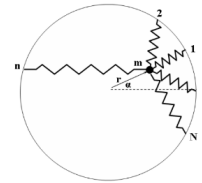
B. Slinky Girando

Considere que a Slinky é colocada em um tubo girante sem atrito em que um de seus extremos fica a uma distância r_o do eixo de rotação. A Slinky, que possui comprimento natural próximo de zero, se move com velocidade angular constante ω e possui massa total M e constante elástica k . Qual o comprimento total da Slinky?



II. NÃO É MOLE

Let angle α and the radial coordinate r of the object be defined as in Figure below. The object can move in the plane of the circle and we ignore the effects of gravity throughout the problem.



a) Compute the length L_n of the n -th spring for arbitrary r and α .

b) Write down the kinetic energy E_{kin} and the potential energy E_{pot} of the object in terms of r , α , and their time derivatives. (Do not evaluate the sum in the potential energy just yet.)

c) Compute the sums:

$$\sum_0^N \cos\left(\frac{2\pi n}{N+1}\right) \quad \text{and} \quad \sum_0^N \sin\left(\frac{2\pi n}{N+1}\right)$$

d) Show that the angular momentum L is conserved.

e) Write down the implicit equation for r in terms of $\eta = L/m$ and $\omega^2 = (N+1)k/m$.

f) Perform the substitution $r(t) = \sqrt{z^2(t) + K}$ where K an unspecified parameter, and obtain the equation "of motion" for $z(t)$.

g) Perhaps surprisingly, this equation admits oscillatory solutions $z(t) = A \cos(\omega t + \phi_o)$. Show this, and determine A in terms of L , K , and ω .

K and ϕ_o can be thought of as integration constants to be specified by the initial conditions. Since the equation of motion is second order, and we have two integration constants, it means that this is the most general function describing the distance $r(t)$. On the other hand, one can notice that the equation for $r(t)$ remains unchanged on substituting r with $-r$. Physically this is the same as substituting α with $\alpha + \pi$, which means that the distance from the center of the circle to the object is the same in any two opposing directions.

h) Write down $r(t)$ in terms of L , ω , K and ϕ_o . Is $r(t)$ periodic? Is the motion periodic? If so, do they both have the same period?

i) Describe the motion of the object when $L = 0$.

* OIFs 2019

†

j) Find out the possible value of r at which the object could perform circular uniform motion. Suppose now we remove the springs labeled $0, d, 2d, \dots$, where d divides $N + 1$.

k) Argue that $r(t)$ derived in part n. continues to hold, but for a different value of ω . What is this new value ω' in terms of ω, N , and d ?

III. FOTO DO ANO

Any black hole in the physical universe is uniquely specified by exactly three quantities: its mass M , angular momentum J , and charge Q . In addition to these, a black hole also has a space-time singularity and an event horizon, which is the surface surrounding the central singularity which can only be crossed “going in”. Any photon or object which falls through the event horizon will not be able to exit back out and will eventually hit the central singularity. It is convenient to describe the spacetime of non-rotating black holes by four coordinates: t, r, θ and ϕ , with $0 \leq \theta \leq \pi$ and $0 \leq \phi < 2\pi$. These can be thought of as the usual spherical coordinates plus time. Because the geometry is no longer flat, the infinitesimal spacetime interval is given by:

$$(dS)^2 = -c^2 f(r)(dt)^2 + \frac{(dr^2)}{g(r)} + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta(d\phi)^2$$

with f and g functions of the four coordinates. For spherically symmetric uncharged black holes (known as Schwarzschild black holes), f and g are functions of the radial coordinate r only, and are given by:

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$$

Where r_s is the Schwarzschild radius.

a) Write down the infinitesimal spacetime interval $(dS)^2$ for the flat space.

Suppose an observer is initially at rest ($\frac{dr}{dt} = 0 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$) at radial coordinate $r_o > r_s$. Under the gravitational pull of the black hole he will start falling towards the event horizon, moving only along the radial direction (and thus keeping θ and ϕ constant at all times). Let t' be the proper time measured by the observer's clock. The correct general relativistic relation between elapsed proper time dt' , elapsed coordinate time dt and radial coordinate change dr is (you don't have to show this):

$$\frac{d^2 r}{dt'^2} + \frac{r_s c^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 - \frac{r_s}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{dt'}\right)^2 = 0$$

b) From the equations above, derive the proper acceleration $\frac{d^2 r}{dt'^2}$ in terms of c, r_s and r . Hint: The spacetime interval dS is the same in all reference frames.

c) Even without resorting to any calculation, it should be expected that the Newtonian expression for a can be recovered in the large r (i.e. small M) limit of the relativistic expression. However, now that you have done the calculation, can you make a stronger statement? Determine r_s in terms of M , the black hole's mass, c , and G , the gravitational constant.

d) Compute the proper velocity $v = \frac{dr}{dt'}$ as a function of r , in terms of M and r_o and G .

e) Using that:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = -\sqrt{x(1-x)} - \arccos(\sqrt{x}) + C$$

Compute the proper time t' after which the observer reaches the event horizon. Write the result in terms of r_o, M, G and c .

The results of parts a to c may lead one to speculate that general relativity is not that different from Newtonian mechanics after all. This is a misleading interpretation, as the two theories differ significantly in many aspects.

f) To highlight one such aspect, calculate the coordinate time t it takes for the observer to reach the event horizon. Are you surprised? Hint: You do not need to determine the antiderivative in order to compute what the integral equals.

We now turn towards the thermodynamical properties of black holes. If only classical physics is taken into account, black holes do not emit any form of radiation and can thus be considered to have zero temperature. However, in 1974 physicist Stephen Hawking proved that once quantum corrections are considered, black holes emit radiation according to the blackbody spectrum (you do not need to show this). The corresponding blackbody temperature is known as the Hawking temperature, T_H , and can be thought of as the temperature of the black hole. For a Schwarzschild black hole of mass M , the Hawking temperature is equal to:

$$T_H = \frac{hc^3}{8\pi G k_b M}$$

g) Using the equation above, compute the entropy S of a Schwarzschild black hole. Express it in terms of c, G, h, k_b , and the horizon area, $A = 4\pi r_s^2$. Hint: Think of Einstein's famous formula.

h) Using the above theorem compute the maximum amount of energy that can be radiated as gravitational waves in the merger of two Schwarzschild black holes of masses M_1 and M_2 , assuming the black holes were initially at rest when far away.

We now return to the subject of Hawking temperature. While Hawking's 1974 derivation of TH was somewhat technical, in parts *i-k*. we will rederive his result using a much simpler argument. Take an infinitesimal spacetime interval of the form of the first equation presented with the functions depending only on the radial coordinate r ,

$$(dS)^2 = -c^2 f(r)(dt)^2 + \frac{(dr^2)}{G(r)} + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta(d\phi)^2$$

And suppose that $F(r)$ and $G(r)$ have a first order zero at r_h , that is $F(r_h) = G(r_h) = 0$, but $F'(r_h) \neq 0$ and $G'(r_h) \neq 0$. Consider only the (t, r) part of $(dS)^2$

and analytically continue the coordinate time t to "imaginary time" τ via $ti\tau$, so that the signature of the spacetime interval becomes Euclidean and the infinitesimal spacetime element dS becomes an infinitesimal element of ordinary length,

$$(dS)^2 = c^2 f(r)(d\tau)^2 + \frac{(dr^2)}{G(r)}$$

The length element ds now describes how distances are measured on an ordinary 2-dimensional plane, with the origin corresponding to $r = r_h$ and $r \geq r_h$ for any point on the plane. This coordinate system is an analogue of polar coordinates, in that r can be thought of as a radial coordinate, and τ as an angular coordinate that must be periodic with some period P .

i) Write down the distance R from the origin to a point of coordinate $r = r_h + \epsilon$ that is infinitesimally close to the origin. Express your answer in terms of ϵ and $G'(r_h)$.

j) Write down the circumference L of a circle of radial coordinate $r_h + \epsilon$ around the origin, with ϵ infinitesimal. Express your answer in terms of P , ϵ and $f'(r_h)$.

K) By imposing the condition that the plane is not singular at the origin, that is that $L = 2R$, determine the period P of the τ coordinate. From field-theoretic arguments this period must be equal to $\frac{hc}{k_b T_h}$. Solve for the Hawking temperature and recover equation (5) for $f(r) = G(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$.

l) Compute the black hole's heat capacity C in terms of G , c , k_b and T_H .

We now consider black hole evaporation. Assuming no infalling matter or energy, a black hole will slowly radiate away its mass via Hawking radiation photons. Although a correct treatment of the evaporation process at high energy scales requires a theory of quantum gravity, as long as T_H is below the Planck scale the semi-classical approach we've been using so far suffices. In what follows we will obtain an estimate of the black hole evaporation timescale, ignoring Planck regime complications. Since at the semi-classical level the black hole spends most of its life below the Planck scale, this

will be a lower bound on the estimate of the evaporation process duration.

m) Assuming black holes obey the blackbody law, compute the power W emitted by a black hole of mass M . Use that the Stefan-Boltzmann constant is:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_b^4}{60 h^3 c^2}$$

and express your result in terms of G , c , h and M .

n) Compute the evaporation time τ in terms of M , assuming the result from the previous part holds at all energy scales. Compare with the age of the universe for a black hole of mass $10M_{sun} = 2.10^{31} kg$. Use that $G = 6.6710^{11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$, $h = 1.0510^{-34} m^2 kg s^{-1}$, $c = 3.10^8 ms^{-1}$

IV. PRECESSÃO SEM THOMAS

A. Definições e Simetria

a) Escreva a energia cinética de um corpo rotacionando em torno de um eixo que passa pela origem. Mostre que a energia cinética pode ser escrita da seguinte forma:

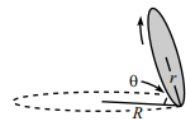
$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \cdot \begin{bmatrix} \int(z^2 + y^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2 + x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2 + y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Que é, basicamente $\frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$. Então, a matriz mais do meio é chamada de tensor de inércia.

b) Como fica o tensor de inércia para uma esfera uniforme de massa M e raio R com a origem em seu centro?

Caso não seja uma esfera, realmente não vale a pena trabalhar com os eixos x , y e z convencionais, já que o momento angular de um eixo dependeria do outro eixo. Então, foi introduzida uma estratégia para lidar com isso, os eixos principais. O principal objetivo é fazer a matriz de inércia ficar parecida com a da esfera.

c) Na situação mostrada abaixo, sendo m , a massa do disco, escolha os eixos principais e calcule a matriz de inércia para os eixos escolhidos por você.

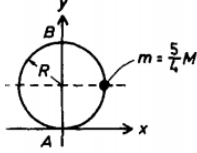


d) Encontre a frequência angular do ponto de contato no chão, ainda na situação de cima.

B. Menos Simetria e Estratégias

Agora, consideraremos o caso em que achar os eixos principais não é tão trivial, devido à falta de simetria.

e) Considere a situação da figura.



Calcule o tensor de inércia da combinação disco e massa pontual em relação ao ponto A.

Sabendo o tensor de inércia, é possível achar os eixos principais utilizando a estratégia de autovetores e autovalores. O método consiste em achar um valor λ que "substitui" a matriz M de inércia. Para isso, é definido um vetor \vec{V} tal que

$$M\vec{V} = \lambda\vec{V}$$

f) Utilizando o método acima, prove que

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Após achar os valores de λ que "substituem" a matriz M , é entendível que esses possíveis valores de λ serão os momentos de inércia dos eixos principais, já que você "substituiu" a matriz de inércia por um "número", que é o próprio momento de inércia. Quanto à orientação dos eixos, eles serão paralelos ao vetor $\vec{V} = (x', y', z')$, isto é:

$$(M - \lambda I)\vec{V} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0$$

Note que para o tensor de inércia que é 3×3 , será uma equação cúbica, portanto terá 3 raízes para λ , conforme esperado (3 eixos). Então, após achar os autovalores λ , precisamos achar os autovetores \vec{V} para cada autovalor utilizando o método mostrado acima, já que o autovetor será paralelo ao eixo principal correspondente ao seu autovalor.

g) Ainda na figura acima, do disco com a massa, encontre os momentos de inércia correspondentes aos eixos principais e a direção desses últimos.

Abaixo, será estudada a condição do disco girando em torno do eixo y , uma boa estratégia para analisar o sistema é utilizar a matriz de rotação, para rotacionar um ângulo ωt , com a finalidade de estar sempre alinhado

com os eixos principais para que as suas equações sejam válidas. A matriz de rotação para uma rotação em torno do eixo y é dada por:

$$M_{rot} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix} = M_{rot} \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = M_{rot}(I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix})$$

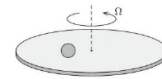
h) O disco é restrito para girar em torno do eixo y com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{y}$ por pivôs em A e B. Descreva o momento angular em torno de A com função do tempo e encontre a força aplicada em B pelo disco (ignore a gravidade).

C. Aplicações com Simetria

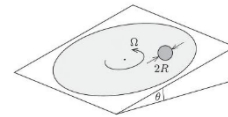
i) Prove que a equação abaixo corresponde a um movimento circular uniforme.

$$\dot{\vec{V}} = \vec{\omega} \times \vec{V}$$

j) Calcule a frequência angular de precessão da bola na situação mostrada abaixo, em que a mesa gira com Ω .



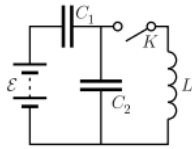
k) Imagine que você quer jogar a bolinha nessa mesa especial da figura, qual a velocidade inicial que ela deve ter para que passe em linha reta? Em que ponto deve ser jogada? Expresse suas respostas em termos de g , θ e Ω .



V. SEM RESISTORES

A. Circuito 1

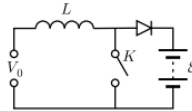
Consider the electrical circuit given below: initially chargeless capacitors C_1 and C_2 were connected to a battery, and at certain moment, the key K will be closed. After that moment, current and voltage will start oscillating. For these oscillations, you need to find:



- a) The maximal current I_{max} through the inductor
 b) The maximal voltage V_{max} on the capacitor C_1 .

B. Circuito 2

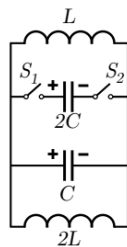
Now, consider this other circuit below that makes it possible to charge a rechargeable battery of voltage $E = 12V$ with a direct voltage source of a voltage lower than E , $V_o = 5V$. To that end, the key K is periodically switched on and off — the open and closed periods have equal length of $\tau = 10ms$.



- c) Find the average charging current assuming that $L = 1H$. The diode can be considered to be ideal; neglect the ohmic resistance of the inductor.

C. Circuito 3

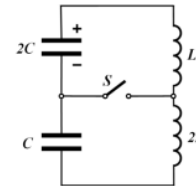
Considere o circuito LC mostrado na Figura abaixo. Inicialmente, as chaves S_1 e S_2 estavam abertas, os capacitores de capacitancias C e $2C$ estavam carregados com a mesma carga elétrica q_o e a corrente nos indutores de indutancias L e $2L$ era nula. O capacitor C começa a descarregar e no instante em que a carga neste capacitor atingiu metade do valor inicial, as duas chaves foram simultaneamente fechadas.



- d) Encontre a máxima corrente I_{max} fluindo no indutor L depois do fechamento das chaves.

D. Circuito 4

Initially, a switch S is unshorted in the circuit shown in the figure below, a capacitor of capacitance $2C$ carries the electric charge q_o , a capacitor of capacitance C is uncharged, and there are no electric currents in both coils of inductance L and $2L$ respectively. The capacitor starts to discharge and at the moment when the current in the coils reaches its maximum value, the switch S is instantly shorted.

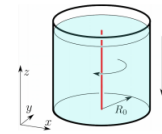


- e) Find the maximum current I_{max} through the switch S thereafter.

VI. VÓRTICES

A. Steady Filament

Consider a cylindrical beaker (radius $R_o \gg a$) of superfluid helium and a straight vertical vortex (K) filament in its center (figure below).

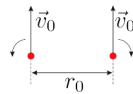


- a) Plot the streamlines. Find out the velocity V at a point \vec{r} .
 b) Work out the free surface shape (height as a function of coordinate $Z(r)$) around the vortex. Free fall acceleration is g . Surface tension can be neglected.

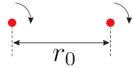
B. Vortex Motion

Free vortices move about in space with the flow (because of the momentum conservation). In other words each element of the filament moves with the velocity \vec{V} of the fluid at the position of that element. As an example, consider a pair of counter-rotating straight vortices placed initially at distance r_o from each other, see the figure. Each vortex produces velocity $V_o = \frac{K}{r_o}$ at the axis of another. As a result, the vortex pair moves rectilinearly with constant speed $V_o = \frac{K}{r_o}$ so that the distance between them remains unchanged.

Consider two identical straight vortices initially placed at distance r_o from each other as shown in the Figure

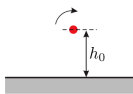


below. Find initial velocities of the vortices and draw their trajectories.



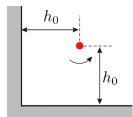
C. Espelho Hidrodinâmico

a) Um vórtice de vorticidade k é formado nas proximidades das bordas de uma piscina, como mostra a figura.



Desenhe a trajetória do vórtice e encontre sua velocidade em função do tempo. Considere a água como incompressível e irrotacional, exceto no ponto em que o vórtice está.

b) Considere que o vórtice é formado num plano como mostra a figura acima:



Desenhe a trajetória do vórtice e determine suas velocidades inicial e final (depois de um tempo muito grande).

Nota: A vorticidade é definida por:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi k$$

VII. SUPERCONDUTIVIDADE

Em determinadas circunstâncias, metais operam em regime de supercondutância, isto é, resistência elétrica nula. Neste caso, ao invés da lei de Ohm, utilizamos as equações de London, que são:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda \vec{J}) = \vec{E} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times (\lambda \vec{J}) = -\vec{B}$$

Onde λ é uma constante do material.

a) Prove que as equações de London são realmente as equações que descrevem o comportamento dos elétrons num material supercondutor e encontre uma expressão para λ em função da densidade de carga do material, carga elementar e massa dos elétrons

b) Considere uma placa supercondutora de espessura $2d$. Existe um campo magnético B_0 paralelo à placa do

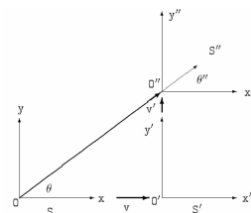
lado de fora, onde não há campo elétrico. Se correntes e cargas superficiais não existem, determine o campo magnético dentro da placa.

VIII. PRECESSÃO DE THOMAS

A Precessão de Thomas é um efeito cinemático descoberto por Llewelyn Thomas em 1926. É um efeito muito sutil que possui grande importância em Física atômica em conexão com a interação spin-orbita. Sem incluir a Precessão de Thomas, a taxa de precessão de um spin de um elétron num átomo está incorreta por um fator 2

Este efeito está relacionado com o fato de que duas transformações de Lorentz sucessivas em diferentes direções são equivalentes a uma transformação de Lorentz mais uma rotação tridimensional. Esta rotação no sistema de referência em repouso do elétron e o efeito cinemático que causa a Precessão de Thomas. Neste problema será obtida a taxa de precessão do sistema de referência do elétron e será mostrado como a mesma inclui um fator 2 na expressão correta da interação spin-orbita.

A figura abaixo representa três sistemas de referência S , S' e S'' . Nelas estão indicadas as velocidades de S' com relação a S , que é igual a v na direção X e de S'' em relação a S' , que é v' na direção Y' . Considere, por simplicidade, que em $t = 0$, os sistemas possuem a mesma origem.



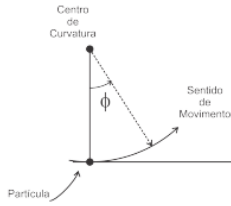
a) Escreva a transformação de S para S'' . Use γ_v e $\gamma_{v'}$

b) Determine o ângulo θ indicado na figura acima medido em S e o ângulo θ'' medido em S'' (Observe que θ é o ângulo entre o raio vetor que liga as duas origens e o eixo X) Qual a diferença entre esses ângulos e os obtidos a partir de transformações de Galileu?

Considere agora que uma partícula se move em uma curva conforme a figura abaixo. Num certo instante de tempo, a partícula está na origem O do sistema S , que tem o eixo X paralelo à trajetória e o eixo y apontando para o centro de curvatura. Em $t = 0$, o sistema S' está se movendo na direção X com velocidade V . Um instante depois, O sistema S'' está se movendo perpendicular a X' na direção Y com velocidade $v' = \delta v$.

c) Indique S , S' e S'' na figura acima e mostre que $\tan \phi = \frac{v'}{v}$. Escreva $\theta'' - \theta = \Delta\theta$ e as velocidades V e δV dos referenciais S' e S'' com função de ϕ .

d) Considerando o deslocamento da partícula num intervalo de tempo Δt e definindo a velocidade angular da



rotação de Thomas como $\omega_t = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Determine ω_t em função da velocidade v da partícula, da aceleração a da mesma nessa trajetória circular e da velocidade da luz c . Em que sentido é essa rotação?

IX. ONDA DE CHOQUE

In interstellar space, shock waves can accelerate charged particles to very high energies. We shall use an idealized model of a shock wave, and assume that it is a potential barrier of a constant height $-V_o$ which moves with a constant velocity ω along the x -axis.

$$\text{If } x < \omega t \quad V(x, y, z, t) = -V_o$$

$$\text{If } x > \omega t \quad V(x, y, z, t) = 0$$

In the frame where the shock wave is at rest, the energy of an electron is conserved. This means that as long as the kinetic energy of an electron of mass m and charge e moving towards the shock wave is insufficient ($\frac{1}{2}mu^2 < eV_o$, where u denotes the speed with which the electron is approaching the shock wave), it is reflected back from the shock wave in the same way as an elastic ball bounces from a rigid wall. In what follows, unless otherwise mentioned, we assume that the electron is bounced elastically by the shock wave. You can always use the parameters e , V_o , m , B , and ω to express your answers. Unless otherwise specified, the velocity of the electron is assumed to be non-relativistic.

a) Let the initial speed of the electron be $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, with $v_x < \omega$. Determine the velocity \vec{v}' (i.e. the components v'_x , v'_y and v'_z) of the electron after being hit by the shock wave.

b) Now, there is also an homogeneous magnetic field of induction B , parallel to the z -axis. At the beginning, electron rests at the origin, and at $t = 0$ is hit by the shock wave. Sketch qualitatively the trajectory drawn by the electron; cover the time period from $t = 0$ until at least

c) Find the curvature radius of the electron's trajectory immediately after its first collision with the shock wave.

d) The electron undergoes soon, at $t = t_2$, a second impact; write down an equation for determining t_2 . Use numerical calculation to obtain an expression for t_2 . $senu = \frac{u}{2}$ has $u = 1,895$ as a solution.

e) Determine the average x -directional velocity v_x of the electron (averaged over the time interval τ between

two subsequent collisions of the electron with the shock wave).

f) As time goes on, the electron undergoes many collisions with the shock wave. Show that during its motion, $v_y + kx = \text{const}$, where k is a constant; express k in terms of e , m and B .

g) From now on, let us consider the limit $t \gg \frac{2\pi m}{eB}$. Determine the average y -directional acceleration a_y of the electron (express it in terms of e , m and B or constant k introduced by task f).

It appears that at the limit $t \gg \frac{2\pi m}{eB}$, the time interval τ between subsequent collisions becomes shorter and shorter, hence we can assume that $\ll \frac{2\pi m}{eB}$. This means that during a time interval between two subsequent collisions the velocity vector of the electron will change only by a very small angle and hence, its acceleration vector $\vec{a} = (a_x, a_y)$ can be assumed to be constant.

h) Let us use now the shock wave's frame of reference, and consider the electron's phase diagram, i.e. a diagram which describes the state of the electron as a point in the $x' - p'_x$ plane, where the vertical axis $p'_x = m(v_x\omega)$ corresponds to the x component of the momentum, and $x' = \int (v_x - \omega)dt$ denotes the distance from the shock wave. Depict qualitatively the electron's phase trajectory, i.e. the curve drawn in phase diagram during one period (between two subsequent collisions of the electron with the shock wave). Grades for this task are based purely on the shape of the curve.

i) As time goes on, the width and height of the phase trajectory will change; however, it appears that the surface area of the region surrounded by the phase trajectory (referred to as the adiabatic invariant) will remain constant with a very good precision. For an initially resting electron, the adiabatic invariant appears to be approximately equal to $1,36 \frac{(m\omega)^2}{eB}$. Determine the total kinetic energy K_f of the electron when it falls behind the shock wave; express it in terms of e , V_o , and ϵ , which is defined as $\epsilon \equiv \frac{2eV_o}{m\omega^2}$. Assume that $\epsilon \gg 1$.

j) This final task is independent from the previous tasks. Consider the propagation of a shock wave as described before, but under the absence of a magnetic field. A relativistic electron moves parallel to the front (in the laboratory frame, the perpendicular component of its velocity is strictly zero). Assuming that $m\omega^2 < eV_o$ and $\omega \ll c$ (with c denoting the speed of light), what should be the relativistic energy of the electron so that it could fall behind the shock wave? You can use any reasonable approximations.

X. GÁS ULTRARELATIVÍSTICO

O gás de fótons armazena energia, mas não sabemos de que maneira se distribui o espectro de frequências no interior do gás. Sendo u_λ a densidade de energia para radiação com comprimento de onda entre λ e

$\lambda + d\lambda$, Podemos mostrar que u_λ não depende do formato, tamanho ou material do recipiente, além de que materiais que são bons emissores também são bons absorvedores e vice versa.

a) Analisando um recipiente cúbico de lados L em que há fótons confinados e imaginando alguma analogia com ondas confinadas lá dentro. Usando os fatos mencionados anteriormente, mostre que o número de estados permitidos com vetor de onda entre k e $k + dk$ é:

$$g(k) dk = \frac{V k^2}{\pi^2} dk$$

Onde k é o módulo do vetor de onda do fóton e V é o volume do recipiente (por simplicidade, assuma que é uma caixa cúbica de lado L). Lembre-se que devido aos diferentes spins possíveis dos fótons, é necessário um fator 2 para diferenciar de partículas "comuns".

b) Relacione a energia do fóton com o módulo do vetor de onda.

c) Prove que a função partição para um fóton é:

$$Z_1 = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\beta\hbar c}\right)^3 \int_0^\infty e^{-\beta\hbar kc} (\beta\hbar kc)^2 d(\beta\hbar kc)$$

Após resolver a integral, note que a função partição pode ser escrita como:

$$Z_1 = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$

d) Relacione a função partição Z_N de um gás com N fótons com a função partição encontrada acima.

e) A partir dos resultados anteriores, encontre a energia interna U de um gás de fótons. Qual a relação entre a densidade de energia u e a pressão P ?

f) Qual o calor específico a volume constante do gás de fótons e a constante de Poisson?

g) Mostre que na expansão do universo, $VT^3 = cte$, onde V é o volume do universo e T é a sua temperatura.

XI. FÍSICA DE FÔNONS

Em um sólido, a energia pode ser armazenada em vibrações dos átomos que são dispostos em uma "malha". Da mesma forma que os fótons são ondas eletromagnéticas quantizadas que descrevem as excitações elementares do campo eletromagnético, os fônons são as ondas de rede quantificadas que descrevem as excitações elementares das vibrações da malha. Em vez de tratar a vibração de cada átomo individualmente, nosso foco está na modos normais do sistema que oscilam independentemente um do outro. Cada modo normal pode ser tratado como um simples oscilador harmônico, e assim, pode conter um número inteiro de energia

"quanta". Essas energias quanta podem ser consideradas "partículas" discretas, conhecidas como fônons. As propriedades termodinâmicas de um sólido podem, portanto, ser calculadas usando a mecânica estatística de um conjunto de osciladores harmônicos simples. O problema aqui é mais complexo devido à natureza dispersiva das ondas na malha, mas dois modelos (o modelo de Einstein e o modelo de Debye) são comumente usados para descrever sólidos e nós vamos avaliar um pouco deles a seguir.

A. Modelo de Einstein

O modelo de Einstein assume que todos os modos vibracionais possuem a mesma frequência ω_E e são independentes. Existem $3N - 6 \approx N$ modos para N osciladores, os 3 tradicionais de cada oscilador, mas devemos subtrair 6 já que o conjunto inteiro não translada nem rotaciona.

a) Mostre que a energia mínima para um oscilador harmônico simples é $\hbar\omega$ e escreva a função partição para esse sistema, lembrando que ele possui energias do tipo $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ com n natural.

b) Sendo Z_k a função partição de cada modo e Z a função partição do sólido inteiro, prove que:

$$\ln Z = \sum_{k=1}^{3N} \ln Z_k$$

E encontre o valor de $\ln Z$.

c) Prove que a energia do sólido U é:

$$U = \frac{3N\hbar\omega\beta}{2} + \frac{3N\hbar\omega_E}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}$$

d) Definindo $T_E \equiv \frac{\hbar\omega_E}{k_B}$, prove que a capacidade térmica C é:

$$C = \frac{3R\left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{\frac{T_E}{T}}}{e^{\frac{T_E}{T}} - 1}$$

e) Para temperaturas altas, prove a regra de Dulong Petit, isto é $C = 3R$

B. Modelo de Debye

O modelo de Einstein assume algo grosseiro, que todos os modos possuem a mesma frequência. Agora, vamos analisar de uma forma mais correta, assumindo uma distribuição de frequências. Vamos assumir que as oscilações na malha correspondem a ondas que se movem com velocidade v_s , então, $\omega = v_s k$, onde k é o módulo do vetor de onda.

f) Analisando um recipiente cúbico de lados L em que há partículas com energia quantizada confinadas e imaginando alguma analogia com ondas confinadas lá dentro. Usando os fatos mencionados anteriormente, mostre que o número de estados permitidos com vetor de onda entre k e $k + dk$ é:

$$g(k) dk = \frac{V k^2}{2\pi^2} dk$$

g) Para a malha, precisamos adicionar um fator 3 porque há 3 possíveis "polarizações" das vibrações da malha (uma longitudinal e duas transversais) para cada valor de k . Já que há um valor limite para o número de modos normais ($3N$), não é possível haver oscilações com frequências ω maiores que um certo valor ω_D . Prove que:

$$\omega_D = \left(\frac{6N\pi^2 v_s^3}{V} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Então, podemos reescrever a equação encontrada no item a como $g(k) dk = \frac{9N\omega^2 d\omega}{\omega_D^3}$

h) A partir disso, mostre que

$$\ln Z = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega \ln \left(\frac{e^{\frac{\hbar\omega\beta}{2}}}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}} \right)$$

i) Mostre que a energia do sólido U e a capacidade térmica C são, respectivamente:

$$U = \frac{9N\hbar}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} \quad e \quad C = \frac{9N\hbar^2}{k_B T^2 \omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^4 e^{\hbar\omega\beta} d\omega}{(e^{\hbar\omega\beta} - 1)^2}$$

j) Definindo a temperatura de Debye como $T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$, como fica a capacidade térmica C para temperaturas baixas e para temperaturas altas? O resultado encontrado diverge do modelo de Einstein?

C. Dispersão de Fônons

Em ambos os modelos, foi assumido que $\omega = v_s k$, agora, vamos melhorar um pouco os modelos anteriores. Considere as vibrações de uma cadeia linear tal como a da figura, em que há várias massas m e várias molas de constante K_s .



k) Escreva a equação do movimento para a n -ésima massa em termos das posições dela x_n e das vizinhas x_{n-1} e x_{n+1}

l) Assuma uma solução do tipo $x_n = Ae^{i(kna - \omega t)}$, onde a é definido como o espaçamento da malha. Qual o valor de ω ?

m) Pelo item anterior, vimos que ω não é igual a $v_s k$, porém, há algum limite em que essa igualdade é válida? Se sim, qual o valor de v_s em termos de K_s , a e m ?

XII. ÓRBITAS QUASE RELATIVÍSTICAS

Um famoso problema enfrentado pela mecânica newtoniana é a explicação da precessão da órbita de mercúrio. O planeta tem um pequeno desvio do período previsto, que só foi explicado séculos mais tarde pela Relatividade Geral de Einstein, sendo inclusive um dos trunfos da teoria. Vamos tentar construir um modelo para explicar essa precessão apenas com a Relatividade Restrita.

a) Considere o sol parado, em relação a um referencial inercial S , e o planeta em consideração o orbitando. A Relatividade Restrita vai introduzir alguns efeitos diferentes nessa órbita, ainda vale a conservação de momento angular do planeta? Escreva sua expressão relativística

b) Escreva a velocidade angular da partícula em função de seu momento angular e dos parâmetros de velocidade dela. Disso, demonstre que:

$$\dot{r} = -\frac{l}{\gamma} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Onde r é a distância da partícula até o sol, θ é o ângulo percorrido em relação à origem do plano, l é o momento angular dela por unidade de massa e γ é o fator de Lorentz.

c) Escrevendo a segunda lei de Newton para o planeta e manipulando e derivando a equação encontrada no item anterior, mostre que:

$$l^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \gamma GM + \frac{l^2}{r}$$

Que é bem parecida com a equação newtoniana clássica. Encontre também a solução da equação para $\gamma \rightarrow 1$.

d) A solução do item anterior é a clássica de Newton para o problema das órbitas em gravitação. Contudo, no problema relativístico teremos algumas complicações adicionais, pois o γ é em geral diferente de 1. Entretanto, podemos recorrer às chamadas aproximações perturbativas para realizar o problema. Expandir γ ate o termo de v^2 para uso do problema, e desprezando o termo de velocidade radial consiga uma relação $\gamma(r)$.

e) Defina duas funções:

$$\frac{1}{s} \equiv \frac{r_c}{r} - 1 \quad e \quad \epsilon \equiv \frac{GM}{lc}$$

Onde $r_c = \frac{l^2}{GM}$. Mostre que vale, em boa aproximação:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{2}{\epsilon s} \right) + \frac{2(1 - \epsilon)}{\epsilon s} = 1$$

com soluções do tipo

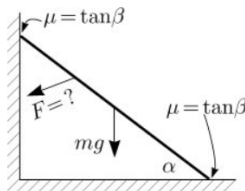
$$\frac{r'_c}{r} \approx 1 + e' \cos(k\theta)$$

com $k \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$

f) Devido aos efeitos relativísticos, o plano de órbita do planeta começa a precessionar lentamente. Encontre a direção e o valor da frequência de rotação do plano, bem como seu ângulo de precessão a cada volta do planeta. Esboce a órbita do planeta em função do tempo.

XIII. SEGURE A BARRA

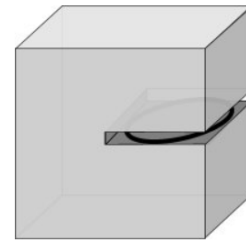
A thin rod of mass m is placed into a corner formed by a vertical wall and a horizontal floor so that the rod forms an angle α with the floor and is perpendicular to the line where the floor and the wall meet. The static coefficient of friction of the rod against the wall and against the floor is $\mu = tg\beta$, which is not large enough for keeping the current position – as long as the only forces applied to the rod are the normal and friction forces applied to its endpoints, and the gravity force mg applied to its centre. What is the *minimal* additional force F needed for maintaining the current position of the rod (assuming that its direction and application point are optimal)? Express your answer in terms of m , g , α , and β .



XIV. FERROU MAGNÉTICO

Consider a brick-shaped ferromagnetic of relative magnetic permeability $\mu \gg 1$, which has dimensions $2a \times 2a \times a$ and a narrow slit of width d and depth a sawed into it as shown in Figure. You may assume that $\mu d \gg a \gg d$. A circular loop of diameter a and inductance L , made of a superconducting material, is put into that slit; the loop carries electric current I . What is the mechanical work A needed to be done in order to pull the loop out of the slit and move it to a large distance from the ferromagnetic?

Remarks: (a) the inductance of the loop equals to L when it is far away from the ferromagnetic. (b) The current in the loop equals to I when the loop is inside the slit. (c) You may assume that the hysteresis of the ferromagnetic is negligible, and μ is constant (independent of B).



XV. 8-BALL POOL

Consider two absolutely elastic dielectric balls of radius r and mass m one of which carries isotropically distributed charge q , and the other $-q$. There is so strong homogeneous magnetic field B , parallel to the axis z , that electrostatic interaction of the two charges can be neglected; neglect also gravity and friction forces. The first ball (negatively charged) moves with speed v and collides with the second ball which had been resting at the origin. The collision is central, and immediately before the impact, the velocity of the first ball was parallel to the x -axis.

a) What is the speed of the second ball immediately after the collision?

b) Sketch the trajectories of the centres of the both balls during the subsequent motion.

c) What is the average velocity (magnitude and direction) of the balls during their subsequent motion?

d) Consider the same situation as before, except that there are three differences in the assumptions: the both balls have now identical positive charge $+q$; electrostatic repulsion between the balls is no longer negligible; the collision is not necessarily central (but the balls move still at the same value of z so that the collision will not induce any motion in the direction of the z -axis). Let P_i denote the point where the surfaces of the two balls are in contact during the i -th collision. What is the maximal distance between P_i and P_j (maximize over all the values $i, j = 1, \dots, \infty$, and over all the impact parameters of the collisions for fixed values of B , m , and q)?

GABARITO

- 1) a) $W = \frac{2}{3}MgL$ b) $V = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$ c) $\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{3g}}$ d) $L = r_o \left[\frac{1}{\cos(\omega\sqrt{\frac{k}{m}})} - 1 \right]$
 2) a) $L_n^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\frac{2n\pi}{N+1} - \alpha)$
 b) $E_{kin} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2) E_{pot} = \frac{K}{2} \sum L_n^2$
 c) Ambas são zero, então $E_{pot} = \frac{K(N+1)}{2}(R^2 + r^2)$
 e) $\ddot{r} - \eta^2 r^{-3} + \omega^2 r = 0$

- f) $(\ddot{Z} + \omega^2 Z)Z^3 + K\ddot{Z}Z + K\dot{Z}^2 + 2K\omega^2 Z^2 + K^2\omega^2 - \eta^2 = 0$
- g) $A^2 = \frac{\eta^2}{K^2\omega^2} - K$
- h) $r(t) = \sqrt{(\eta^2 + K^2\omega^2) + (\eta^2 - K^2\omega^2)\cos(2\omega t + 2\phi_0)}$;
 r repete seu valor a cada π , então, $T = 2 \cdot \frac{2\pi}{2\omega}$
- i) $r(t) = \sqrt{K} \sin(\omega t + \phi_0)$
- j) $r = cte = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{|L|}{\sqrt{(N+1)mk}}}$
- k) Os resultados valem e $\omega' = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{d}}$
- 3) a) Faça $f(r) = g(r) = 1$ na primeira equação.
- b) $a = \frac{-r_s c^2}{2r^2}$
- c) $r_s = \frac{2GM}{c^2}$
- d) $V = -\sqrt{2GM(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o})}$ (Resultado clássico)
- e) $t' = \frac{r_o}{c} \left[\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_o}} + \sqrt{\frac{c^2 r_o}{2GM}} \right] - \arccos\left(\sqrt{\frac{2GM}{c^2 r_o}}\right)$
- f) $dt \rightarrow \infty$
- g) $S = \frac{k_b c^3 A}{4Gh}$
- h) $E_{max} = (M_1 + M_2 - \sqrt{M_1^2 + M_2^2})c^2$
- i) $R = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{G'(r_h)}}$
- j) $L = \sqrt{F'(r_h)\epsilon P}$
- k) $T_H = \frac{hc^3}{8\pi G k_b M}$
- l) $C = \frac{-hc^5}{8\pi G k_b T_H^2}$
- m) $W = \frac{hc^6}{15360\pi G^2 M^2}$
- n) $\tau = \frac{5120\pi G^2 M^3}{hc^4} \approx 10^{77} s$ o que é por volta de 10^{60} vezes a idade do universo.
- 4) b) Fora a diagonal principal, em que todos os termos são $\frac{2}{5}MR^2$, todos os termos são zero.
- c) Fora a diagonal principal, que possui $\frac{MR^2}{4}$ e $\frac{MR^2}{4}$, todos os termos são zero.
- d) $\Omega = \frac{g}{\frac{3}{2}Rtg\theta - \frac{5}{4}rsen\theta}$
- e) $\frac{MR^2}{4} \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$
- g) $I_1 = 4MR^2 \rightarrow (0,0,1)$, $I_2 = (2 - \frac{\sqrt{29}}{4})MR^2 \rightarrow (0.561, 0.828, 0)$, $I_3 = (2 + \frac{\sqrt{29}}{4})MR^2 \rightarrow (-0.828, 0.561, 0)$
- h) $\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \frac{MR^2\omega}{4} \begin{bmatrix} -5\cos\omega t \\ 6 \\ 5\sin\omega t \end{bmatrix}$
- Como o eixo Y é um eixo principal, o disco não exerce força sobre os pivôs, somente a massa.
- j) $\omega = \frac{2}{7}\Omega$
- k) $\vec{V}_o = \frac{5gsen\theta}{2\Omega} \vec{e}_x$ e pode ser lançada em qualquer ponto.
- 5) a) $\frac{C_1\epsilon}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$
- b) $\epsilon(1 + \frac{C_1}{C_1+C_2})$
- c) $8,9mA$

- d) $\frac{q_o}{\sqrt{LC}}$
- e) $I_{max} = \frac{q_o}{\sqrt{2LC}}$
- 6.A) a) $V = \frac{q_o}{r}$. Linhas de velocidade são circulares.
- b) $Z(r) = Z_o - \frac{K^2}{2gr^2}$
- 6.B) $V = \frac{K}{r_o}$. Os filamentos vão rotacionar em torno do ponto que está "no meio do caminho" entre eles.
- 6.C) a) $V = \frac{K}{2h_o}$ e $V_\infty = \frac{K}{h_o\sqrt{2}}$. Move-se em uma linha reta paralela à parede.
- b) $V_o = \frac{K}{2\sqrt{2}h_o}$
- 7) a) $\lambda = \frac{m}{ne^2}$
- b) $B = B_o \frac{\cosh(KZ)}{\cosh(KZ)}$, $K = \frac{\mu_o}{\lambda}$
- 8) a) $y = \gamma'(y'' + v't'')$
 $x = \gamma\gamma'(x'' + \frac{vv'}{c^2}y'' + vt'')$
 $t = \gamma\gamma'(t'' + \frac{vx''}{\gamma'^2 c^2} + \frac{v'}{c^2}y'')$
- b) $tg\theta = \frac{v'}{\gamma v}$ $tg\theta'' = \frac{\gamma'v'}{v}$
- c) $\Delta\theta = \arctg(\gamma'tg\phi) - \arctg(\frac{tg\phi}{\gamma}) \approx \frac{a\Delta t}{v}(\gamma' - \frac{1}{\gamma})$
- d) $\omega T \approx \frac{a}{v}(\gamma' - \frac{1}{\gamma})$
- 9) a) $\vec{v}' - (2\omega - v_x, v_y, v_z)$
- b) $t = \frac{\pi m}{eB}$
- c) $R = \frac{2m\omega}{qB}$
- d) $t_2 = 1,895 \frac{m}{Be}$
- e) $\langle v \rangle = \omega$
- f) $k = \frac{Bm}{e}$
- g) $\langle a_y \rangle = -k\omega$
- i) $K_f = \frac{e^2}{(2.04)^2} eV_o$
- j) $E = \frac{eV_o c^2}{\omega^2} (1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}}) \approx \frac{2eV_o c^2}{\omega^2}$
- 10) d) $Z_N = \frac{Z^N}{N!}$
- e) $U = 3Nk_B T$, $u = 3P$
- f) $c_v = 3R$ e $\gamma = \frac{4}{3}$
- 11) a) $Z = \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$
- b) $\ln Z = 3N[-\frac{\hbar\omega\beta}{2} - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})]$
- j) $C = 3R \frac{4\pi^4}{5} (\frac{T}{T_D})^3$ e $C = 3R$
- k) $m\ddot{x}_n = K_s(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$
- l) $\omega = \sqrt{\frac{4K_s}{m}} \sin(\frac{ka}{2})$
- 12) a) $\vec{L} = \gamma mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{z}$
- d) $\gamma(r) \approx 1 + \frac{L^2}{2r^2 c^2}$
- f) $\omega_p = \frac{G^4 M^4}{2L^5 c^2} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}$
- 13) Se $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{4}$, $F = \frac{mg\cos(\alpha+2\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)}$. Se $\frac{\pi}{2} \geq \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{4}$,
 $F = \frac{mg\cos(\alpha+2\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}$
- 14) $A = \frac{\pi\mu_o I a^2}{8d} (\frac{\pi\mu_o I a^2}{4Ld} - I)$
- 15) a) $v_2 = v$
- c) $\langle v \rangle = \frac{v}{\sqrt{4 + \frac{R^2}{r^2} (\pi - \arctg(\frac{2r}{R})})}$, onde $R = \frac{mv}{qB}$
- d) $d_m = \frac{2mv}{qB}$