Lista foice 2

Rafael Timbó

Novembro 2018

1 Agulhas

Uma agulha de comprimento l é derrubada aleatoriamente sobre uma folha de papel com pautas paralelas espaçadas de uma distância l. Qual é a probabilidade de que a agulha cruze uma linha?

2 Resistência do ar

Uma folha de massa M move-se com velocidade V através de uma região do espaço que possui uma densidade n de partículas por unidade de volume. Considere que cada partícula possui uma massa m e velocidade v.

a)Se $v << V$, qual é a força por unidade de área na folha?

b)E se $v >> V$?

3 Estados energéticos

Considere um sistema composto por N partículas que ocupam níveis discretos de energia E_1, E_2, E_3 e assim por diante, possuindo assim uma energia total E. O objetivo desse problema é calcular o número de partículas N_i no estado energético E_i e a probabilidade de encontrar uma partícula nesse estado energético.

a)Definimos a multiplicidade de um sistema como o número de maneiras na qual podemos arranjar ele. Sendo assim, mostre que a multiplicidade do nosso sistema em questão é:

$$\Omega = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!...}$$

Em um sistema grande (um número elevado de partículas), este tende a estar numa configuração em que a multiplicidade seja máxima, pois este é o estado mais provável. Portanto, nosso objetivo é maximizar a expressão encontrada acima. Para tal feito, iremos recorrer à técnica dos multiplicadores de Lagrange. Com ela nós conseguimos encontrar pontos de máximo ou mínimo de funções com restrições. Seja uma função f de n parâmetros x_i com g restrições homogêneas, temos a função:

$$\Gamma = f - \sum_i \lambda_i g_i$$

Que respeita:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 0$$

Em que λ_i é um multiplicados de Lagrange, uma constante a ser determinada.

b)Quais são as restrições do sistema?

c)Maximizar a Ω pode ser uma tarefa difícil, mesmo com os multiplicadores de Lagrange. Para contornar isso, maximize a função $ln(\Omega)$.

Obs:Para N grande, $ln(N!) \approx Nln(N) - N$.

d)Calcule assim a probabilidade de uma partícula estar no estado de energia E_i.

e)Mostre que a energia média das partículas é dado por:

$$\bar{E} = -\frac{\partial ln(Z)}{\partial \lambda}$$

Em que Z é a função de partição do sistema, dada por:

$$Z = \sum_i e^{-\lambda E_i}$$

f)Usando que num gás ideal vale

$$E = \frac{3}{2} N K_b T$$

Calcule quanto deve ser o coeficiente λ.

4 Lei de Hooke

Vamos aproximar um material, em geral algo como um polímero, como uma extensão unidimensional de moléculas ligadas, que você pode imaginar como sendo ligadas por barras de comprimento a. Considerando que o polímero é construído de várias barras, que podem ser ligadas no começo das moléculas e no fim de outras, orientadas para esquerda ou direita, e que ele é constituído de N moléculas, estando em contato com um reservatória a temperatura T:

a)Encontre a entropia desse sistema quando o comprimento da cadeia for L. Esboce um gráfico da entropia por comprimento (Comprimentos negativos fazem sentido físico nesse caso, pois esse comprimento tem duas orientações, você pode pensar nele como uma deformação ou a posição da última molécula de cadeia).

b)Escreva a primeira lei da termodinâmica pra esse sistema, considerando que o sistema realiza trabalho por meio de uma força F sobre o sistema quando esticado ou comprimido.

c)Encontre a força F que o sistema exerce através de sua entropia, em função de L,T e a. Sendo L o tamanho do polímero.

d) Qual o comportamento dessa força pra $L \to Na$ e para $L \to 0$? Coloque isso num gráfico. Esse modelo explica corretamente o funcionamento da mola para $L \to 0$?

5 Modelo de Ising discreto

O modelo de Ising é um modelo construído para explicar como sistemas físicos respondem a aplicação de campo magnético e como esse afeta seus parâmetros.

a)Encontre a entropia do sistema em função de N_+ e N_-, onde os números correspondem, respectivamente, à quantidade de dipolos alinhados e desalinhados com o campo, usando também a condição que a soma dos números deve ser igual ao número N de partículas no sistema.

b) Encontre a energia média do sistema por unidade de partícula em função da temperatura do sistema e dos parâmetros fornecidos.

c) Ache o momento de dipolo médio de uma partícula e com isso encontre a susceptibilidade magnética do sistema para $B = 0$, qual a dependência disso com a temperatura?

O próximo item é independente dos anteriores.

d) Calcule a probabilidade de uma partícula estar no estado $+m$ e de estar no $-m$, com isso encontre a energia média do sistema e seu momento de dipolo magnético médio, com isso encontre a susceptibilidade magnética do sistema para $B = 0$.

6 Modelo de Ising contínuo

Neste modelo, vamos assumir que o dipolo magnético tem um momento de dipolo de módulo m que pode assumir uma direção qualquer no espaço.

a) Determine a probabilidade de encontrar um dipolo com um ângulo entre θ e $\theta + d\theta$ com o campo magnético. Onde a densidade de probabilidade em θ é máxima?

b) Encontre a energia média de uma partícula em função da temperatura do sistema e dos parâmetros fornecidos.

c) Ache o momento de dipolo médio de uma partícula e com isso a susceptibilidade magnética do sistema para $B = 0$, qual a dependência disso com a temperatura?

7 Efeito Schottky

Vamos considerar um modelo simplificado de um gás ideal constituído por N partículas que podem ser encontradas em dois estados, com energias 0 ou $\epsilon > 0$. Para especificar o estado microscópico desse sistema é necessário conhecimento do número de partículas em cada um dos estados energéticos. Considere o caso em que N_1 partículas no estado de energia nula e N_2 no estado de energia ϵ.

a)Considere que todas as partículas são idênticas e que a única forma de diferenciar cada uma é através de sua energia, determine o número de maneiras pelas quais é possível obter um estado como aquele descrito no texto, como função de N, N_1 e N_2.

b)Exprima o resultado obtido como função da energia total $E = \epsilon(N - N_1)$ do sistema, da energia ϵ e do número total de partículas N da amostra.

c)A partir dos itens anteriores, determine a entropia do sistema.

Quando trabalhamos com grandes populações, é comum utilizarmos aproximações que facilitem a nossa análise. Uma dessas aproximações é a aproximação de Stirling:

$$ln(N!) \approx Nln(N) - N$$

d)Utilize a aproximação de Stirling para escrever a densidade de entropia $s = S/N$ em função da constante de Boltzmann, da energia ϵ e da densidade de energia $u = E/N$ do sistema.

e)Calcule assim a temperatura do sistema em função de k, u e ϵ

f)A partir dos resultados obtidos, faça um esboço do gráfico s em função de u. Você observou algo estranho?

g)Determine a densidade de energia u como função de ϵ e do fator de Boltzmann $\beta = 1/kT$.

h)Faça um esboço do gráfico de u por T.

i)Determine o calor específico c do sistema como função de β, k e ϵ e faça um gráfico do calor específico contra a temperatura do sistema.

8 Distribuição de velocidades

Dado um sistema com N partículas que se comporta como um gás ideal, existe uma distribuição de velocidades, já que as partículas não possuem necessariamente as mesmas energias. O objetivo desse problema é determinar a distribuição de velocidades para um gás ideal. Para isso, precisamos fazer algumas observações: as velocidades em cada eixo são independentes, logo, sendo $f(v_i)dv_i$ a probabilidade de encontrar a i-ésima componente da velocidade entre v_i e $v_i + dv_i$, temos:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

Além disso, podemos afirma que $f(v_i)$ depende apenas de v_i^2, de modo que:

$$f(v) = f(v^2) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Desta forma, determine $f(v_x)$ e então $f(v)$. Determine também a velocidade média e a velocidade mais provável de uma partícula.

9 Laser

Em um processo de absorção e emissão de energia por átomos de um gás, por exemplo o efeito "laser", Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, podemos caracterizar por simplicidade em dois estados de energia: estado fundamental com energia E_0 e um estado excitado simples de energia $E_1 > e_0$. Neste processo, podemos distinguir três transições: absorção estimulada, emissão espontânea e emissão estimulada. Considerando átomos com dois estados de energia, em um campo de radiação térmica de temperatura T os três processos são representados pelos seguintes estados:

-Átomos podem ser promovidos do estado fundamental (0) para o estado excitado (1) por absorção de um fóton:

$$\left(\frac{dN_0}{dt}\right)_{abs} = -B_{01}N_0\rho_v$$

-Átomos podem decair do estado 1 para o estado 0 por uma emissão espontânea:

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{esp} = -A_{10}N_1$$

-Átomos podem decair do estado 1 para o estado 0 por emissão estimulada:

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{est} = -B_{10}N_1\rho_v$$

Onde B_{ij} e A_{ij} são os coeficientes de Einstein, N_j são populações (átomos) no estado j e ρ_v representa a densidade de energia de radiação espectral com frequência v.

As populações N_0 e N_1 estão no equilíbrio térmico e podemos escrever a densidade de radiação como:

$$\rho_v = \frac{8\pi hv^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1}$$

a)Nesta situação, determine a razão entre N_0 e N_1.

Em equilíbrio térmico, a relação entre a população do estado excitado e estado fundamental deve obedecer o princípio de Boltzmann.

b) Baseado nestas informações, determine a razão dos coeficientes A_{10}/B_{10} e B_{10}/B_{01}.

Para se obter maior valor da população excitada, denominada inversão de população, um bombeamento ótico é utilizado para se ter maior emissão estimulada e espontânea.

c)De que forma a potência do bombardeamento ótico deve variar com o comprimento de onda quando queremos obter um efeito laser no baixo comprimento de onda?