Lista Foice 3

Rafael Timbó

November 2018

1 Forninho

Considere um forno a temperatura T, do qual partículas de massa m são emitidas, e que elas saem por um buraco muito fino de diâmetro a (com tamanho da ordem de átomos). Estime o diâmetro do feixe após um tempo t, o valor do diâmetro inicial que minimiza esse valor, e o valor mínimo em função de t.

2 Neutrino Indeciso

Considere que nas mudanças de estado de um neutrino, ele oscila entre dois estados diferentes, um de massa m_1 e outro de massa m_2. Estime o período dessas oscilações, isto é, o tempo que leva para que o neutrino ir de um estado, passar para o outro e voltar para o estado inicial. Dê sua resposta em termos de m_1, m_2, c (velocidade da luz) e h (constante de planck).

3 Bolinhas quânticas

Determine as alturas que uma bolinha quântica de massa m pode ter ao saltar elasticamente sobre uma superfície plana num campo gravitacional uniforme g.

4 Quantização

De acordo com o postulado de Bohr-Sommerfeld (Quantização da Ação) para o movimento periódico de uma partícula sob a influência de uma energia potencial, uma partícula cujo momento generalizado é p e sua coordenada generalizada é q deve seguir a seguinte regra de quantização:

$$\oint p dq = 2\pi n\hbar$$

Onde n é um inteiro. Utilizando essa regra, determine os valores permitidos da energia de uma partícula de massa sob a influência dos seguintes tipos de potencial:

a) Um poço de potencial de largura L (onde $V = 0$) e paredes infinitamente altas $v = \infty$

b) Ao longo de uma circunferência de raio r

c) Um poço de potencial unidimensional onde $U(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$. Onde α é uma constante positiva.

5 Lápis

Considere um lápis como uma massa m no topo de uma haste de comprimento l. O lápis inicialmente se encontra de pé (perpendicular ao plano da mesa em que se encontra)

a)Determine a equação de movimento do lápis para os instantes iniciais (θ pequeno) sabendo que no instante inicial ele foi deslocado para uma inclinação θ_0 com uma velocidade angular inicial ω_0.

b)Às vistas da mecânica clássica, teoricamente seria possível manter um lápis em equilíbrio por um tempo arbitrariamente longo, fazendo θ_0 e ω_0 suficientemente pequenos. Contudo, quando visto pelo formalismo da mecânica quântica, o princípio da incerteza de Heisenberg proíbe que θ_0 e ω_0 sejam arbitrariamente pequenos. Deste modo, é impossível equilibrar um lápis por um tempo maior que um certo intervalo τ. Utilizando o princípio da incerteza e o resultado obtido no item anterior, estime o maior tempo que pode-se levar para que $\theta(t)$ se torne da ordem de 1. Faça $m = 0.01kg$ e $l = 0.1m$.

6 Luz negra

Sabemos que corpos irradiam radiação eletromagnética dependendo da sua temperatura. O objetivo desse problema é desvendar a maneira como os corpos (ou pelo menos os corpos negros) irradiam.

PARTE A-Termodinâmica

a)Considere um gás de fótons em uma cavidade diatérmica (assim, em equilíbrio térmico com o ambiente). Encontre quanto vale a pressão do gás em função da densidade de energia u. Encontre também a quantidade de energia que flui por uma unidade de área por unidade de tempo, F.

b)Utilizando a primeira lei da termodinâmica e uma relação de Maxwell, mostre que a densidade de energia é dada por:

$$u = AT^n$$

Onde A é uma constante e n é um inteiro. Determine o valor de n.

c)Podemos definir F da seguinte forma:

$$F = \sigma T^n$$

Sendo σ a constante de Stefan-Boltzmann e n o número encontrado no item anterior. Encontre assim uma relação entre a constante A e σ.

PARTE B-Mecânica Estatística

O gás de fótons armazena energia, mas não sabemos de que maneira se distribui o espectro de frequências no interior do gás. Sendo u_λ a densidade de energia para radiação com comprimento de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$, Podemos mostrar que u_λ não depende do formato, tamanho ou material do recipiente, além de que materiais que são bons emissores também são bons absorvedores e vice versa.

d)Mostre que a densidade de estados de um fóton é dado pela expressão:

$$g(k)\,dk = \frac{Vk^2}{\pi^2}\,dk$$

Onde k é o vetor de onda do fóton e V é o volume do recipiente (por simplicidade, assuma que é uma caixa cúbica de lado L). Não esqueça que o fóton possui 2 estados de polarização, isto é, possui 2 valores possíveis para seu Spin.

e)Encontre a energia média de um oscilador harmônico quântico.

f)Podemos modelar a energia de um fóton com frequência angular ω como a energia de um oscilador harmônico quântico com a mesma frequência. Sendo assim, encontre a energia total do gás de fótons U e , então, sua densidade u. Você encontrou algum problema? Como podemos consertá-lo? A integral a seguir pode ser útil:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

Onde $\zeta(x)$ é a função Zeta de Riemann e $\Gamma(x)$ é a função Gamma.

g)Compare seu resultado com os da parte A e determine σ em função de constantes fundamentais. Determine também a função $u_f(f, T)$.

7 Deslocamento

Prove a lei de deslocamento de Wien com os resultados da questão anterior. Esboce o gráfico de u_f x f para 3 temperaturas diferentes. Justifique quaisquer aproximações que usar.

8 Sólido de Einstein

Um sólido cristalino é formado por partículas ligadas que oscilam em torno de uma posição de equilíbrio e podemos usar esse fato para encontrar resultados importantes através da análise estatística desse sistema. Ao se deparar com esse sistema, por simplicidade, Einstein assumiu que todos os modos vibracionais das partículas eram iguais e possuíam frequência ω.

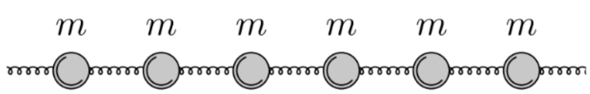
a)Considerando as partículas osciladores harmônicos quânticos tridimensionais, determine a função de partição de uma partícula e a do sistema completo composto por N partículas.

b)Determine assim a energia interna do sólido em função dos parâmetros do sistema e constantes fundamentais.

c)Determine a capacidade térmica do sólido nos limites de baixas e altas temperaturas. O resultado para altas temperaturas fornece a lei de Dulong-Petit.

9 Massa mola

Considere um modelo simplificado de um sólido, como várias massas m presas unidimensionalmente umas às outras por molas de constante elástica k, como mostra a figura. Calcule a velocidade de propagação de uma onda nessa cadeia molecular em função de m, k e a (distância entre duas massas consecutivas). Considere que o comprimento de onda λ é muito maior que a.



10 Debye

No modelo de Debye para um sólido, consideramos uma distribuição $g(\omega)$ de frequências, que seria a quantidade de partículas com frequência entre ω e $\omega + d\omega$. Considerando a aproximação em que as vibrações no sólido se comportam como ondas com a mesma velocidade v_s, $\omega = v_s q$ (q é o número de onda).

a)Considerando que a onda no sólido é formada por fônons, análogos aos fótons, determine $g(\omega)$ (não esqueça que o fônon pode ter 3 polarizações para cada q).

b)Como existe um limite de $3N$ modos vibracionais, assumimos que existe uma frequência limite, ω_D, definida por

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)\, d\omega = 3N$$

Determine ω_D.

c)Determine a energia interna e a capacidade térmica do sólido de Debye, em função de integrais de parâmetros conhecidos.

d)Nos limites de altas e baixas temperaturas, quais os valores de C? Nesse modelo recuperamos a lei de Dulong-Petit?