Lista Foice 4

Rafael Timbó

I. COMPRESSIBILIDADE

Mostre que para um escoamento de um fluido com densidade ρ e velocidade $\vec{v}$ na posição $\vec{r}$ no instante t, vale:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)$$

Onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)$$

É a chamada derivada covariante. Para um escoamento estacionário incompressível, a que essa equação se reduz?

II. VISCOSIDADE

Fluidos reais possuem atritos internos que produzem a viscosidade do líquido. Um fluido viscoso produz uma tensão de cisalhamento dada por:

$$\tau_{xy} = \eta\frac{dv_x}{dy}$$

Em que η é a viscosidade. As outras 5 possíveis tensões de cisalhamento são análogas à mostrada.

Encontre a distribuição de velocidade $v(r)$ para um escoamento com viscosidade η num cilindro de raio a e comprimento l, sujeito a uma diferença de pressão ΔP.

III. FLUIDOS

Em mecânica dos fluidos existem uma série de equações de conservação e quantidades que se mantém constantes em determinadas circunstâncias de um escoamento que nos permite resolver a grande maioria dos problemas em hidrodinâmica.

a)Derive a equação de Bernoulli para uma linha de escoamento em um fluido incompressível

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + P = cte$$

b)A equação geral para um escoamento de um fluido é a equação de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}P + \mu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\right]$$

Onde $\vec{f}$ é a a força por unidade de volume atuante no sistema e μ a viscosidade do fluido.Mostre que se o escoamento for irrotacional,além de incompressível e invíscido se conserva a quantidade (no caso em que a força atuando no volume é de origem gravitacional):

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + P - \frac{\partial\phi}{\partial t} = cte$$

Que, no caso estacionário ($\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r})$) se torna a equação de Bernoulli. Podemos perceber que, no caso de um escoamento irrotacional a conservação da quantidade apresentada no item a) é mais forte do que parecia, pois naquela situação ela era válida apenas ao longo de uma linha de escoamento (em todas as linhas aquela quantidade é mantida constante, mas não necessariamente seriam todas iguais), enquanto desta forma podemos afirmar que em um escoamento irrotacional, a equação de Bernoulli vale para quaisquer pontos.

Nota: ϕ é o potencial de velocidades, definido de modo que $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$.

c)Com a equação de Navier-Stokes, mostre também que se em um instante a vorticidade do fluido é nula, ela será nula para sempre.

Nota: A vorticidade é definida como:

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$$

IV. IGUAIS?

Temos dois recipientes com interiores diferentes, como mostra a figura, cheios de água. Em um certo instante, uma tampa lateral de cada recipiente é aberta e a água começa a jorrar. Qual a velocidade da água em cada caso?

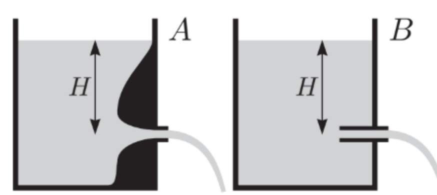


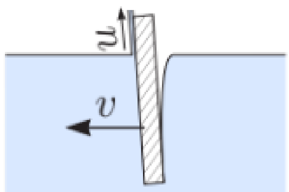
Figura 1. Recipientes (A) e (B)

V. "ADDED MASS"

Considere uma esfera imersa em um líquido invíscido e incompressível, se movimentando com velocidade constante v de modo que inicialmente não havia vorticidade. Determine a energia cinética da água em função da densidade ρ do líquido e do volume V da esfera.

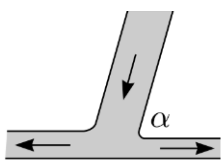
VI. FESTA NA PISCINA

Uma barra está se movendo na água com velocidade v em relação à sua normal, com base nisso e sabendo que ela faz um ângulo α com o eixo y, encontre a velocidade u da água subindo ao longo da barra.



VII. CALHA

Um jato d'água atinge uma superfície lisa e daí se se separa em dois jatos diferentes, um se movendo pra direita e uma pra esquerda. Sendo o ângulo que o jato faz com a horizontal igual a α, encontre a razão da vazão de água dos dois jatos, e a razão de suas velocidades.

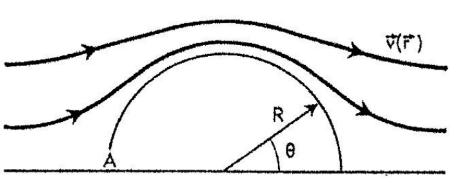


VIII. HANGAR

Um hangar de avião com uma forma semicilíndrica de comprimento L e raio R é submetido a um vento perpendicular ao seu eixo, como mostrado na figura abaixo. Considerando que a velocidade do vento distante é v_0 e laminar, determinar a força exercida neste hangar se a porta localizada na entrada, ponto A da figura, é completamente aberta.

Equação da superfície equipotencial:

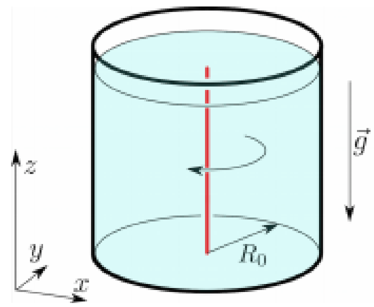
$$\phi = -v_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)cos(\theta)$$



IX. VÓRTICES

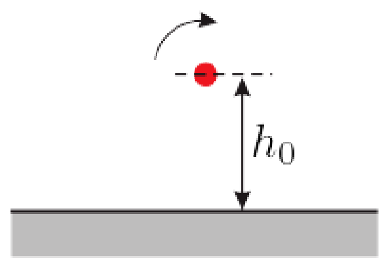
a) Vamos considerar um fluido em que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ para qualquer ponto, exceto por um pequeno filamento de vorticidade,como indica a figura, em que dentro dele temos que:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi k$$



Determine o formato da superfície do líquido fora da zona de vorticidade.

b)Considere agora uma situação parecida, em que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$, exceto por um pequeno filamento de vorticidade, como no item anterior. No entanto, agora o filamento se encontra a uma distância h_0 de uma parede, como mostra a figura:



Determine como o sistema se comporta ao longo do tempo.

X. NAVIER-STOKES

Parte 1)Aceleração

Quando analisamos um escoamento, podemos adotar dois procedimentos distintos, denominados Euleriano e Lagrangeano. No primeiro, adotamos um referencial fixo, em que analisamos o vetor velocidade num determinado ponto do espaço ao passar do tempo.Já no segundo, escolhemos um conjunto de partículas a ser estudado e avaliamos as suas posições e velocidades em função do tempo. Tendo em mente que para determinados problemas um método é mais conveniente que o outro, qual deles deve ser usado para calcular a aceleração de uma partícula (ou elemento de fluido) em um escoamento e quanto ela vale em função de derivadas da velocidade?

Parte 2)2^a lei de Newton

Para encontrar a equação de movimento de um fluido, devemos portanto aplicar a segunda lei de Newton a um elemento de massa. Para facilitar, podemos dividir as contribuições de força em forças atuantes no volume (como o peso da massa) e forças atuantes na superfície (as tensões). As forças que agem no volume são mais simples e podemos dizer que essa força por unidade de volume é $\vec{f}$. Já as forças atuantes na superfície são mais complicadas, uma vez que para um escoamento viscoso existem tensões cisalhantes, assim, temos de dar um tratamento tensorial para essa grandeza física, dando origem ao tensor das tensões. Esse tensor $3x3$ pode ser escrito da forma:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. O primeiro termo está relacionado com as pressões de fato, já a matriz d_{ij} contém a informação da viscosidade. Através de argumentos de simetria, pode-se demonstrar que a matriz de desvio é dada por:

$$d_{ij} = \mu\Big(\frac{dv_j}{dx_i} + \frac{dv_i}{dx_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\Big)$$

Desse modo, o tensor das tensões de modo geral é dado pela expressão:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\Big(\frac{dv_j}{dx_i} + \frac{dv_i}{dx_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\Big)$$

Sendo assim, a força aplicada em um elemento de fluido é dado por:

$$\vec{F} = \int \vec{f}\,dV + \oint \overleftrightarrow{\tau}\cdot d\vec{S}$$

Desenvolva essa expressão para obter a equação de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}P + \mu\Big[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}\Big(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\Big)\Big]$$

Pode ser útil demonstrar a seguinte identidade matemática:

$$\oint B\,d\vec{S} = \int \vec{\nabla}B\,dV$$