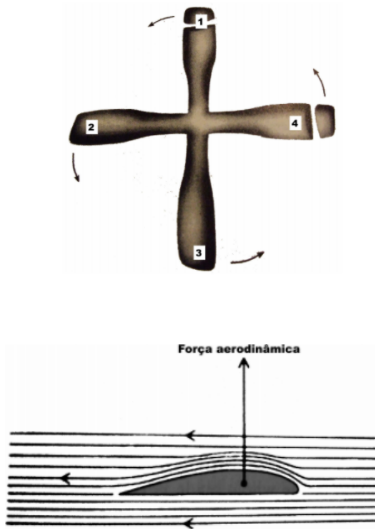
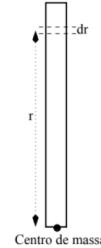


Lista Foice 9

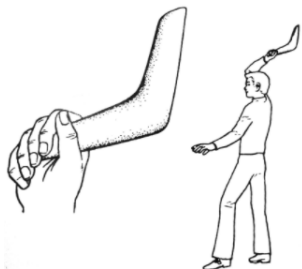
Rafael Timbó

I. TUDO QUE VAI, VOLTA

Neste problema vamos estudar o movimento do boomerang. O boomerang pode possuir vários formatos, o que torna seu estudo mais simples (que será utilizado no problema) é o que está representado na Fig.1. Esta forma consiste simplesmente numa cruz formada por quatro lâminas iguais. Estas lâminas não são planas. O seu perfil é o de uma asa de avião, como se pode ver na Fig.2



O boomerang é atirado como se mostra na Fig.3, com a face curva das lâminas virada para o lado esquerdo do atirador. Quando sai da mão do atirador, o boomerang roda rapidamente em torno do seu centro de massa, que se desloca paralelamente ao solo. Devido à sua rotação, o boomerang possui momento angular em relação ao seu centro de massa que, inicialmente aponta para a esquerda do atirador.



O segredo do movimento do boomerang está nas forças aerodinâmicas que se exercem sobre suas lâminas devido ao seu perfil. Estas forças atuam perpendicularmente

ao plano de rotação do boomerang, no sentido do momento angular (tal como na asa de um avião, a força aerodinâmica aponta no sentido da face plana para a face curva, pois a velocidade do ar que escoia junto à face curva é superior à do ar que escoia junto com a face plana). A força que se exerce sobre a lâmina superior é maior que a força sobre a lâmina inferior porque as velocidades de rotação e translação se somam no primeiro caso e se subtraem no segundo. Esta diferença nas forças sobre as lâminas gera um torque total não nulo sobre o boomerang, o que leva o momento angular a precessar, tal como um giroscópio. A combinação de precessão com a aceleração do centro de massa no plano perpendicular ao plano de rotação do boomerang leva o boomerang a descrever uma órbita circular, regressando à mão do atirador.

Para simplificar o estudo, considere que o peso do boomerang e a resistência do ar são desprezíveis (com um boomerang real, basta incliná-lo ligeiramente em relação à vertical no momento do lançamento para contrabalançar o efeito dessas forças). A massa do boomerang é m e o atirador imprime-lhe no lançamento uma velocidade de translação do centro de massa V e uma velocidade de rotação ω em torno do centro de massa. As 4 lâminas podem ser consideradas barras de espessura desprezível e comprimento l . Assuma ainda que a força aerodinâmica sobre uma secção de uma lâmina é proporcional ao quadrado da velocidade tangencial dessa secção (ver Fig.4):

$$dF = cv_t^2 dr$$

(c é uma constante que depende da forma do boomerang e da densidade do ar.) A velocidade tangencial da lâmina é a componente da velocidade perpendicular à lâmina. A componente na direção da lâmina, dita radial, não contribui para a força aerodinâmica.

a) Considerando apenas a lâmina 1 (Fig.1) que, no instante do lançamento, se encontra alinhada com a vertical acima do centro de massa do boomerang, mostre que, no instante t a velocidade tangencial de um ponto da lâmina

que dista r do centro de massa é:

$$v_{1t} = \omega r + V \cos(\omega t)$$

b)Determine a força total sobre esta lâmina.

c)Determine, no instante t , o torque da força aerodinâmica sobre um ponto da lâmina 1 que se encontra à distância r do centro de massa.

d)Determine o torque total da força aerodinâmica sobre a lâmina 1.

e)Mostrar que a força aerodinâmica total sobre o boomerang é:

$$|\vec{F}(t)| = \frac{4}{3}c\omega^2 l^3 + 2V^2 cl$$

e determine a sua direção e sentido.

f)Mostrar que o torque total da força aerodinâmica sobre o boomerang é:

$$|\vec{M}(t)| = \frac{4}{3}c\omega V l^3$$

e determine sua direção e sentido.

g)Devido ao momento das forças aerodinâmicas, o momento angular do boomerang precessa, i.e, roda em torno de um dado eixo (tal como num giroscópio). Se o boomerang rodar muito rapidamente, o momento angular associado devido à precessão é desprezível e a frequência de precessão ω_p do boomerang é dada simplesmente pelo quociente entre o momento total das forças aerodinâmicas e o momento angular associado à rotação do boomerang. Mostre que:

$$\omega_p = \frac{4cVl}{m}$$

h)Para o boomerang regresse ao atirador, descrevendo uma órbita circular, a resultante das forças aerodinâmicas deve ser sempre dirigida para o centro da órbita. Determine a relação entre a velocidade do centro de massa e a velocidade de rotação do boomerang em torno do centro de massa para que esta condição se verifique. Nessas condições, determine também o raio da trajetória do boomerang.

II. PORCOS OSCILANTES

A. Análise Estática

Após muitas e variadas tentativas, o Lobo Mau conseguiu capturar um dos 3 porquinhos. Para se redimir de todas as artimanhas que o porquinho lhe tinha feito, resolveu pendurá-lo no topo de um penhasco e assá-lo lentamente numa fogueira acesa no fundo do penhasco. Dada a corpulência do porquinho, nenhuma das cordas que o Lobo Mau encontrou o suportava. Depois de uma longa pesquisa, o Lobo Mau descobriu uma corda de bungee jumping com a robustez necessária, atou o porquinho a

essa corda e deixou-a esticar lentamente, ficando a sua pobre vítima sobre a fogueira.

Antes de pendurar o porquinho, para ter certeza de que a corda elástica que ia usar não ia esticar tanto que o porquinho ficasse demasiadamente queimado, o Lobo Mau resolveu determinar o comprimento máximo da corda que garantia um assado de qualidade. Para sua grande surpresa, os seus cálculos estavam errados, pois o porquinho ficou sentado na fogueira. Onde estaria o erro? Depois de pensar um pouco, o LM reparou que tinha cometido um erro crasso: a massa da corda não era desprezível, como ele inicialmente assumira... Seja l_0 o comprimento natural da corda e k a sua constante elástica, designa-se por $l = l_0 + \Delta l$ o comprimento da corda quando o porquinho, de massa M , é nela suspenso. Seja ainda m a massa da corda.

a)Qual foi o valor de Δl determinado pelo LM ao assumir que a massa da corda era desprezível?

b)Para determinar a variação real do comprimento da corda, pode-se dividi-la em vários elementos de massa iguais dm . Na ausência de gravidade, todos esses elementos possuem o mesmo comprimento dz . Mas, na presença de um campo gravitacional, os elementos esticam de uma forma não uniforme. Calcule a constante elástica de um desses elementos.

c)Assumindo que a constante elástica de um pequeno elemento da corda não se altera quando este é esticado, determine a elongação real da corda quando o porquinho é suspenso. Escreva a elongação da forma $\Delta l = m_{ef}g/k$, com $m_{ef} = M + \alpha m$ e determine o valor de α .

B. Análise Dinâmica

Para corrigir seu erro, o LM puxa a corda e deixa o porquinho a 2 metros do chão, como pretendia. Mas na sequência desse processo, o porquinho fica a oscilar para cima e para baixo, ou seja, a elongação deixa de ser constante... Convencido que a sua análise estática se mantém válida, o LM estima que o período destas oscilações seja $T = 2\pi\sqrt{m_{ef}/k}$, contudo, o sistema está a oscilar com uma frequência diferente da esperada... o LM imediatamente conclui que o valor de m_{ef} numa situação dinâmica é diferente do valor estático. Assim, α deve ter um valor diferente quando há oscilações!

a)Numa primeira abordagem ao problema, o LM assume que a corda se estica uniformemente. Então um ponto da corda à distância z da beira do penhasco move-se com uma velocidade proporcional a z , $v(z) = \gamma z$. Relacione γ com a velocidade do porquinho nesse instante, $v_p(t)$.

b)Determine a energia cinética do segmento dz da corda.

c)Determine a energia cinética total do sistema porco+corda.

d)Qual é o valor dinâmico de α e o período de oscilação?

C. Análise Dinâmica +

O LM estabiliza as oscilações do porco e resolve pensar um pouco mais no problema das cordas elásticas enquanto espera pelo porco assado.

a) Designe por $y(z, t)$ a posição no instante t , do ponto de coordenada z da corda (z é medido na ausência de gravidade) e $x(z, t) = y(z, t) - z$ o deslocamento deste ponto da corda, no instante t , em relação à sua posição inicial. A tensão nesse ponto no instante t é:

$$T(z) = kl_0 \frac{dx}{dz}$$

Determine a resultante das forças que atuam sobre um segmento da corda de comprimento dz .

b) Obtenha a seguinte relação:

$$kl_0 \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{mg}{l_0} = \frac{m}{l_0} \frac{d^2x}{dt^2}$$

c) A equação anterior é a equação de uma onda que se propaga com velocidade $V = l_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$. Desprezando o segundo termo do primeiro membro, ou seja, assumindo que a corda é pouco densa, encontre uma expressão para as frequências de oscilação.

III. ÓPTICA UM POUCO MENOS GEOMÉTRICA

A. Fermat

a) Defina a função Eikonal como $S = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{k_0}$, onde \vec{k} é o vetor de onda e k_0 o seu módulo no vácuo. A partir dela, mostre que:

$$\oint n dl = 0$$

onde n é o índice de refração do meio em uma determinada posição. Interprete o resultado fisicamente.

b) Um famoso princípio ondulatorio é o princípio de Huygens. Ele diz que uma frente de onda (caracterizada por pontos de uma onda que possuem a mesma fase) pode ser pensada e descrita como a superposição de infinitas frentes de onda secundárias. Utilizando o princípio de Huygens, demonstre a lei de Snell:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

c) Mostre que num meio com índice de refração variável ($n = n(x)$), a relação abaixo vale para um raio de propagando no plano xy :

$$n(x) \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = cte$$

d) Mostre, a partir disso, que vale a equação de Euler-Lagrange para uma função $f = f(y, \dot{y}, x)$ com $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

E determine a função $f(y, \dot{y}, x)$ em função de $n(x)$, coordenadas espaciais e suas derivadas.

e) A equação de Euler-Lagrange é derivada a partir de um princípio variacional muito conhecido, sendo obtida ao se extremizar um funcional. Uma função real possui como domínio e contradomínio números reais (você fornece um número para x e recebe um valor correspondente y). Já um funcional funciona de maneira diferente, o seu domínio não são mais os números reais, mas sim um espaço de funções, enquanto o contradomínio continua sendo os reais (você fornece uma função ao funcional e ele lhe devolve um número correspondente). Uma classe de funcionais são integrais definidas. Em determinados problemas estamos interessados em extremizar um funcional (ou buscar a função que torna um funcional máximo ou mínimo). Matematicamente, temos:

$$J[y(x)] \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x) dx$$

Quando uma função $g(x)$ é extremizada, vale que em primeira ordem $dg = \frac{dg}{dx} dx = 0$. Para um funcional, temos algo análogo. No seu extremo, vale

$$\delta J[y(x)] = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x) dx = 0$$

As soluções dessa equação respeitam a equação de Euler-Lagrange. Ou seja, as funções que extremizam o funcional são soluções dessa equação diferencial.

Deste modo, utilize a relação do item c) para escrever uma relação na forma integral e interprete esta expressão.

B. Óptica Matricial

a) Considere um raio se propagando no plano xy com uma inclinação pequena. Seja y a altura do raio em uma posição x , y' a altura do raio numa posição $x + e$, γ a inclinação do raio na posição x e γ' a inclinação do raio na posição $x + e$, determine as componentes da matriz de transporte T que relaciona os vetores (y', γ') e (y, γ) .

b) Considere agora que o raio de luz encontra-se com um dioptra esférico convexo de raio R e índice de refração n . Sendo y e γ a altura e a inclinação do raio de luz imediatamente antes de adentrar o dioptra e y' e γ' a altura e a inclinação imediatamente após, determine a matriz de refração que relaciona os vetores (y', γ') e (y, γ) .

c) Considere uma lente delgada formada por dois dioptras esféricos de raios de curvatura R_1 e R_2 e índice de refração n . Determine a relação entre as coordenadas p e p' do objeto e da imagem, respectivamente, formada pela lente.

d) Considere uma lente formada por dois dioptrós esféricos de raios de curvatura R_1 e R_2 . A lente possui um índice de refração n e espessura e . Determine o foco da lente.

C. Dependência do índice de refração com a frequência da luz

É um fato conhecido que o índice de refração dos materiais refrata de maneira distinta para cada λ . Isso se deve à polarização que a onda eletromagnética provoca nos meios ao passar por eles.

a) Determine a relação entre o índice de refração de um meio com sua constante dielétrica.

b) Considere um meio que possui uma densidade eletrônica η , submetido a uma onda eletromagnética em que o campo elétrico varia na forma $E = E_0 \cos(\omega t)$. Determine assim o índice de refração do material em função da frequência da onda eletromagnética, da densidade eletrônica, da carga elementar e da massa de um elétron.

D. Aberração Cromática e Pares Acromáticos

Ao incidir um feixe policromático em uma lente, as cores irão se separar, dando origem a uma aberração cromática. Definimos como aberração cromática axial (ACA) a região sobre o eixo da lente em que há a formação de um espectro contínuo.

a) Considerando a lente delgada, com raios R_1 e R_2 , determine o comprimento d_{ACA} da aberração cromática axial, quando recebe um feixe de luz policromático paralelo ao seu eixo.

b) Para corrigir esse efeito, podemos associar um par de lentes chamado de par acromático. Mostre que, quando duas lentes delgadas estão separadas por uma distância d , o foco equivalente é dado pela expressão:

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

c) Considerando $d = 0$ e definindo $\alpha = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, determine a relação entre α_1 da lente 1 e α_2 da lente 2 para que esses constituam um par cromático.

IV. ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO

a) Um dipolo elétrico consiste de cargas oscilantes com frequência angular ω . Mais especificamente, $Q = \pm Q_0 \cos(\omega t)$, localizado em $(0, 0, \pm s)$, respectivamente. Qual é a corrente entre as cargas?

b) Em coordenadas esféricas, denotamos as componentes do campo magnético como B_r , B_θ e B_ϕ . Calcule $B_\phi(r, \theta, t)$ com a lei de Biot-Savart, supondo que ela se mantém válida nessa situação, numa posição r e instante

t . Note que a velocidade da luz é finita. expresse sua resposta em termos do momento de dipolo $p = 2Q_0 s$.

c) Ao contrário do que foi assumido no item anterior, a lei de Biot-Savart apenas vale para correntes estacionárias. Para corrigir o campo magnético, adicionamos um termo B_{onda} dado por:

$$\vec{B}_{onda} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \left[\frac{d}{dt} I\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r}$$

Encontre a componente $B_\phi(r, \theta, t)$ do campo magnético adicional na posição r , ângulo θ e instante t .

d) Compare as amplitudes dos dois campos magnéticos numa distância longa r . Determine uma condição para que o campo determinado pela lei de Biot-Savart seja desprezível em comparação ao adicional.

e) Numa larga distância r , o campo elétrico é predominantemente devido à indução eletromagnética do campo B_{onda} . Encontre a relação entre $\frac{\partial E_\theta}{\partial r}$ e $\frac{\partial B_\phi}{\partial t}$. Pode-se assumir que a única componente de \vec{E} em grandes distâncias é E_θ .

f) Sabendo que a grandes distâncias o campo elétrico é dado por $E(r, \theta, t) = \frac{A(\theta)}{r} \cos(\omega t - kr)$, determine $A(\theta)$.

g) Sabendo que a magnitude e a direção de propagação da potência por unidade de área são dadas pela média temporal do vetor de Poynting, determine $I(r)$ em uma posição r distante da origem.

h) Quando uma onda eletromagnética incide em uma molécula, ela induz um dipolo $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, em que α é a polarizabilidade da molécula. Desse modo, o dipolo oscilante irá irradiar. Esse processo é chamado de espalhamento. Considere uma onda EM com campo elétrico incidente na direção x dado por $\vec{E}_x = \vec{E}_{x0} \cos(\omega t - kx)$ em que \vec{E}_{x0} é polarizado com um ângulo θ_x em relação ao eixo z . Determine a intensidade $I_x(r)$ da radiação de espalhamento na direção z .

i) Para uma onda não polarizada, determine o valor de $I_x(r)$ na direção z .

V. ANÃ BRANCA E PRESSÃO DE DEGENERESCÊNCIA

No fim da vida de estrelas com massas comparáveis à do Sol, a força gravitacional comprime a estrela de modo a formar anãs brancas. O processo de compressão se dá até que a pressão quântica devido aos elétrons (conhecida como pressão de degenerescência) equilibre a força gravitacional. Esse fato determina o tamanho das anãs brancas.

a) Considere um elétron de massa m_e confinado numa caixa unidimensional de comprimento L . Sua energia cinética é dada por $E = \frac{p}{2m_e}$, em que p é seu momento. A relação de De Broglie relaciona o momento linear com um comprimento de onda associado ao elétron: $p = \frac{h}{\lambda}$. Apenas ondas estacionárias com nós nas extremidades da caixa correspondem a estados energéticos permitidos

para os elétrons. Sabendo que $E_n = E_1 n^2$, determine E_1 .

b) Por simplicidade, consideraremos a anã branca como uma caixa cúbica tridimensional de volume V . A energia associada ao elétron é $E = E_1(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$, em que n_i é um número inteiro positivo. Calcule o número total de estados energéticos com energia menor ou igual a um E_{max} . Assuma que E_{max} é muito maior que E_1 .

c) Suponha que existem N prótons e N elétrons em uma anã branca. Devido ao famoso princípio da exclusão de Pauli, cada estado eletrônico acomoda até 2 elétrons. Os elétrons preencherão os estados energéticos até atingir um estado de energia máximo, em que atingem a energia de Fermi, E_F . Determine E_F .

d) Pode-se mostrar que a energia média por elétron é dada por $\frac{3}{5}E_F$. Considerando os elétrons como um gás, determine a pressão de degenerescência. Ela é para dentro ou para fora?

e) Compare a pressão de degenerescência devida aos prótons e aos elétrons.

f) A energia potencial gravitacional é majoritariamente definida pelos prótons e nêutrons. Assuma que m_p a massa de um próton ou de um nêutron e que o número de cada um deles na anã branca é N . Considerando a densidade da anã branca constante, determine a energia potencial gravitacional dela, sabendo que seu raio é R .

g) Derive uma expressão para o raio da anã branca. O raio aumenta ou diminui com o aumento da massa total?

h) Estime a massa da anã branca quando a velocidade dos elétrons se tornam comparáveis à velocidade da luz. O que acontece com a anã branca nesse limite?

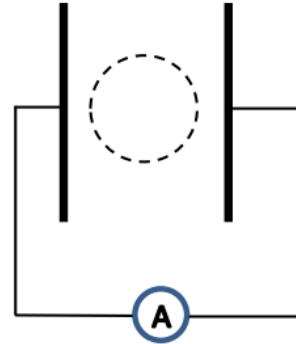
VI. ARMADILHA DE PENNING

a) Considere um íon (massa m e carga q) com velocidade inicial no plano $X-Y$ imerso num campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$. Encontre sua frequência angular ω_c (frequência de ciclotron) e sua energia cinética em termos de ω_c e seu raio orbital r_0 .

b) Considere uma carga pontual q entre duas placas paralelas aterradas separadas por uma distância D . Pode-se mostrar que a carga induzida em cada placa é $Q_1 = q(\frac{x}{D} - 1)$ e $Q_2 = -q\frac{x}{D}$, respectivamente, em que x é a distância entre a carga e a placa 1. De acordo com a figura, encontre a corrente elétrica no circuito se o íon do item anterior permanece na sua órbita circular centrada em $x = \frac{D}{2}$ (pode-se assumir que $D \gg r_0$). Para obter uma corrente maior, devemos aumentar ou diminuir o raio orbital?

c) Um campo elétrico AC $E(t) = E_0 \cos(\omega_c t)$ é aplicado entre as placas. Suponha que a órbita do íon se

mantém aproximadamente circular para cada revolução e que a energia ganha por ciclo é muito menor que a energia cinética do íon. As cargas induzidas pelo íon podem ser desprezadas. Depois de um tempo T muito maior que o período orbital, encontre o raio da órbita R .



d) O campo elétrico do item anterior é desligado em um instante em que o diâmetro da órbita continua menor que D . Para evitar que o íon escape da região de campo magnético uniforme (caso tivesse uma velocidade inicial no eixo z), é ligado um outro campo elétrico dado pelo potencial: $V(r) = V_0(z^2 + \beta x^2 + \beta y^2)/z_0^2$, em que V_0 é positivo. Determine a frequência de oscilação do íon na direção z , ω_z .

e) Determine o valor de β para que o potencial se mantenha no vácuo.

Essa combinação de campos elétrico e magnético é chamada de armadilha de Penning. Ela é um dispositivo para aprisionar íons por um longo período de tempo, de modo que sua frequência de ciclotron e, então, sua razão q/m pode ser mensurada com grande precisão. A partir de agora, use ω_c e ω_z como quantidades conhecidas.

f) O íon está preso numa armadilha de Penning agora. Determine as equações de movimento do íon, isto é, as equações diferenciais para $x(t)$ e $y(t)$.

g) Defina $u(t) = x(t) + iy(t)$, em que $i = \sqrt{-1}$. Encontre uma equação diferencial para $u(t)$.

h) Sabendo que $x(0) = R$ e $y(0) = 0$, determine a função $u(t)$. Faça o limite $\omega_c \gg \omega_z$. Denomine as frequências dos modos normais de ω_+ e ω_- , com $\omega_+ > \omega_-$.

i) Para verificar como a trajetória do íon se parece, vamos para um referencial que gira com velocidade angular Ω . Encontre a expressão para $\vec{u}(t)$ no referencial girante.

j) Faça $\Omega = \omega_-$. Faça um desenho esquemático dessa trajetória no referencial girante no plano $X-Y$.

k) Desenhe a trajetória no referencial do laboratório no plano $X-Y$.

l) Determine as 3 possíveis formas da trajetória no plano $X-Y$ em um referencial que gira com velocidade angular $\omega_c/2$ se as condições iniciais são variáveis.