Foice - Lista 1

Gabriel Capelo

October 4, 2019

1. Rendendo o bloco

Um mol de um gás monoatômico realiza um ciclo cujo a representação no gráfico PxV é um retângulo (duas isobáricas e duas isovolumétricas). Determine o rendimennto máximo.

2. Dando trabalho

Qual o trabalho máximo que se pode obter de dois recipientes com massa m de água que possui calor específico C, um a temperatura T_1 e o outro a temperatura T_2?

3. Passou do limites

A segunda lei da termodinâmica enunciada por Clausius afirma que "Não é possível que o único resultado de um processo termodinâmico seja a transferência de calor de um corpo para outro mais quente que ele". Existe ainda outra formulação da mesma lei, proposta por Kelvin, que pode ser enunciada como "Não é possível que o único resultado de um processo termodinâmico seja a completa transversão de calor em trabalho".

a) Demostre que a violação de qualquer um dos dois enunciados implica necessariamente a violação do outro.

Com isso podemos concluir que as duas formulações da segunda lei são equivalentes. A segunda lei foi importante para o estudo das máquinas térmicas. Dentre as máquinas térmicas, certamente a de maior interesse físico é a de Carnot, que é caracterizada por duas transformações isotérmicas e duas adiabáticas.

b) Calcule o rendimento do ciclo de Carnot em função das temperaturas das isotermas.

c) Demonstre que qualquer maquina térmica reversível operando entre as mesmas temperaturas tem o mesmo rendimento que o ciclo de Carnot.

d) Demonstre que nenhuma máquina térmica pode ter um rendimento maior que o do ciclo de carnot.

4. Temperatura máxima

Três objetos idênticos estão nas temperaturas T, 2T e 2T. Suponha que os objetos estão isolados de qualquer outro corpo. Qual é a temperatura máxima que um deles pode ter? Para resolver essa questão é possível que você precise resolver uma equação do terceiro grau. No entanto, observe que é possível descobrir uma raíz por chute (pense fisicamente).

5. Entropia

A entropia é a grandeza que mede o nível de desordem de um sistema termodinâmico e a sua variação durante um processo diz muito sobre a reversibilidade do mesmo. Calcule a variação de entropia nos seguintes processos:

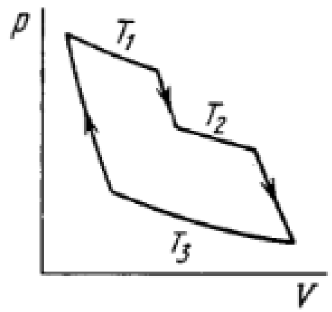
a) Dois gases monoatômicos idênticos com mesmo número de partículas N, são mantidos em dois recipientes idênticos de volume V, a uma mesma temperatura T e pressão P. Num certo instante os recipientes são conectados muito rapidamente, de modo que se misturam e atingem um novo equilíbrio.

b) Mesmo processo do item anterior, mas agora com os gases sendo distintos.

c) Dois gases monoatômicos distintos, com mesmo número de partículas N, são mantidos em recipientes de volumes V1 e V2 e a temperaturas T1 e T2, mas à mesma pressão P. Num certo instante, os recipientes são conectados muito rapidamente, de modo que se misturam e atingem um novo equilíbrio. No limite T1 = T2 e V1 = V2 sua resposta coincide com a do primeiro item?

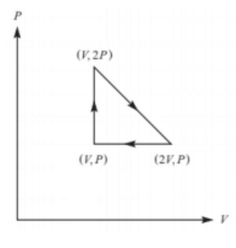
6. Quase Carnot

Um gás ideal passa por um processo consistindo de isotermas e adiabáticas com as temperaturas T_1, T_2 e T_3. Usando que, nas expansões isotérmicas, todos os volumes crescem nas mesmas proporções, cacule o rendimento do ciclo.



7. Ciclo da vida

Calcule o rendimento do ciclo termodinâmico abaixo.



8. Van der Waals

a) Partindo da primeira lei da termodinâmica, e das definições de c_p e c_v, demonstre que

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

onde c_p e c_v são as capacidades térmicas a pressão constante e a volume constante, respecctivamente, e U e V são a energia e a pressão de um mol.

b) use o resultado acima e a seguinte expressão

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

para achar $c_p - c_v$ para o gás de Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Use esse resultado para mostrar que, a medida que $V \to \infty$, com p constante, obtem-se o resultado do gás ideal.

c) Assuma que um mol de gás obedece a equação de estado de Van der Waal para a energia $u = cT - \frac{a}{V}$ (onde u é a energia do gás, V é o volume molar, a e c são constantes). Encontre c_p e c_v individualmente.

9. Mágica

Você recebe 1kg de água destilada a 0°C e uma quantidade igual de água a 100°. Sua missão é aquacer a água destilada até 60°C. Você não tem acesso a mais água, mas possui uma série de materiais isolantes e condutores, além de uma série de ferramentas. Qual a temperatura máxima que seu método pode alcançar? Você consegue alcançar seu objetivo ?

10. Mayer

Considerando que $S = S(T, V)$ para um sistema termodinâmico, mostre que :

$$C_p - C_V = \frac{TV\alpha^2}{\kappa}$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

e κ a compressibilidade isotérmica:

$$\kappa = \left(-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right)^{-1}$$

11. Vendedor

Na loja de tintas, um vendedor afirma que uma certa tinta (muito cara) tem a seguinte propriedade: Ela reflete 90% de toda a radiação que chega nela, mas emite radiação da mesma forma que um corpo negro. Desta forma, ela tenderia a esfriar o obejto, já que absorve pouco, mas emite muito. Demonstre que esse vendedor está tentando te passar a perna.

12. Desigualdade de Clausius

a) Demonstre que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

e

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

para um processo cíclico reversível. Para isso, considere que a cada instante, o sistema troca uma quantidade dQ_i de calor com um reservatório a temperatura T_i e n é o número de reservatórios que participam da troca.

b) Sabemos que sistemas reais não são perfeitamente reversíveis. Portanto, considere que, no i-ésimo instante, uma máquina de Carnot C_i opera entre reservatórios a temperatura T e T_i(o reservatório de temperatura T é comum a todas as máquinas C_i). O i-ésimo reservatório recebe um calor dQ_i e a maquina C_i produz um trabalho dW_i. Então, como no item anterior, o reservatório a temperatura T_i troca uma quantidade de calor dQ_i com o nosso sistema de interesse. Utilizando o enunciadado de Kelvin nessa configuração, demonstre que, num processo cíclico

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

onde a igualdade só vale se o processo é reversível.

13. Forno natural

O quanto você pode esquentar um corpo negro (esférico) usando raios solares e uma lente convexa fina que tem o foco com tamanho igual ao dobro do diâmetro? Isso depende do tamanho dele?

14. Potenciais e Maxwell

Funções de estado são de fundamental importância para o estudo da Termodinêmica, como por exemplo a energia U de um sistema. Da primeira lei da termodinâmica, sabemos que $dU = TdS - pdV$. Essa equação nos mostra que as variáveis naturais para descrever U são S e V. Portanto escrevemos $U = U(S, V)$ (estamos desconsiderando o número de particulas N dado que, nesta situação, não há troca de partículas com o sistema). Dessa forma

a) Escreva expressões para T e p em função de U e/ou suas derivadas.

Evidentemente, a soma ou produto de funções de estado também é uma função de estado. No entanto, existem, além da energia, algumas funções de particular interesse, as quais são denominadas de potenciais termodinâmicos. São elas $H = H(S, T)$ (entalpia), $F = F(T, V)$ (energia livre de Helmholtz) e $G = G(T, p)$ (energia livre de Gibbs).

b) Descubra, realizado as transformadas de Legendre a partir de $U(S, T)$, as funções mencionadas $H(T, p)$, $F(T, V)$ e $G(T, p)$ em função da temperatura, entropia, pressão e volume.

c) Utilizando o fato de que os potenciais termodinâmicos descritos no item anterior são funções de estado, encontre, de forma análoga ao item a), seis relações entre T, S, p, V e H,G,F e/ou suas derivadas.

d) Utilizando o fato de que dU é um diferencial exato, demonstre que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

e) Encontre outras três equações que relacionam p, V, S, T e/ou suas derivadas.

As quatro equações encontradas nos dois itens anteriores são chamadas de Relações de Maxwell.

15. Disponibilidade

Nos processos físicos em geral os sistemas tendem a maximizar ou minimizar alguns parâmetros no equilíbrio. Esses parâmetros dependem de quais restrições o sistema é sujeito e são na verdade expressões da maximização da entropia do universo. Vamos analizar essas afirmações pelo problema.

a) Tomando um sistema físico qualquer, defina um reservatório térmico, i.e., um sistema vizinho que cobre o primeiro e que tem seus parâmetros intensivos praticamente constantes. Tendo o sistema vizinho temperatura T_0 e pressão p_0, escreva a primeira lei da termodinâmica para o reservatório e para o sistema.

b) Utilizando a desigualdade da segunda lei, encontre uma desigualdade que relacione a variação de energia, entropia e volume do sistema com p_0 e T_0.

c) Mostre que a quantidade definida como disponibilidade

$$A = U + p_0 V - T_0 S$$

tende a um valor de mínimo no sistema físico, ou seja, transformações espontâneas minimizam A e no equilíbrio A é estacionário.

d) Demonstre que, para sistemas com entropia e volume fixos, minimizar A é equivalente a minimizar U. De forma análoga, ache desigualdade que involvam a variação do Entalpia $H(S,p)$, energia livre de Gibbs $G(T,p)$ e energia livre de Helmholtz $F(T,V)$ considerando sistemas

- a pressão e entropia fixos;
- a pressão e temperatura fixos;
- a volume e temperatura fixos.

16. Triângulos

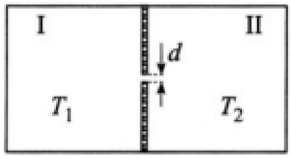
Os três vértices de um triângulo equilátero são mantidos a temperaturas T_1, T_2 e T_3 (mantidas constantes). Qual deve ser a temperatura no centro do triângulo ?

17. Analogias

Suponha que você tem um meio de condutividade térmica k, e que você coloca nele duas placas a uma distância d. Você coloca uma esfera no meio das duas placas, supondo o raio da esfera a com $a \ll d$. Encontre a distribuição de temperatura na esfera no estado estacionário, sabendo que ela tem condutividade infinita.

18. Buraquinho

Um container é dividido em duas partes por uma partição com um pequeno furo de diâmetro d. Gás Hélio é colocado em ambas as partes, com diferentes tempearatuas T_1 e T_2.



a) Como o diâmetro d determina o processo físico pelo qual os gases atingem o estado de equilíbrio ?

b) Qual a razão entre o livre caminho médio das divisões λ_1/λ_2 quando $d \ll \lambda_1$ e $d \ll \lambda_2$?

c) E quando $d \gg \lambda_1$ e $d \gg \lambda_2$

19. Pressão de saturação

Deduza a equação de Clausius-Clapeyron

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{\mu\lambda}{RT^2} P_s$$

Sendo o calor latente de vaporização λ, temperatura T, pressão de saturação P_s e massa molar μ. Dica: Trabalhe com um ciclo de Carnot infinitesimal em que o trabalho é realizado pelo vapor de água e que ambas as fontes quente e fira são feitas de água, com temperaturas T_0 e T_1.

20. Trocando calor

Um cilindro de volume V fixo é separado em dois compartimentos de volume V_L e V_R por um pistão móvel de massa desprezível. Os compartimentos da esquerda e da direita são preenchidos com n_R e n_L mols de um mesmo gás ideal e a temperaturas iniciais T_{R_0} e T_{L_0}.

a) Quais são os volumes dos compartimentos da esquerda e da direita inicialmente quando o sistema está em equilíbrio ?

b) Suponha agora que possa fluir calor de um compartimento para outro através da área do pistão, mas que o cilindro como um todo seja termicamente isolado do meio exterior. O calor por tempo $\frac{\Delta Q_{L\to R}}{\Delta t} = k(T_L - T_R)$ que flui do compartimento da esquerda pra direita é proporcional à difernça de temperatura entre estes. Determine a diferença de temperatura $T_L - T_R \equiv \Delta T$ em função do tempo.

21. Bomba de calor

Uma casa é mantida a uma temperatura T por meio de uma bomba de calor (*heat pump*) ideal a qual usa um rio a uma temperatura T_0 como fonte de calor. A máquina consome uma potência W e perde calor para o meio externo a uma taxa de $\alpha(T - T_0)$, onde α é uma constante positiva. Mostre que

$$T = T_0 + \frac{W}{2\alpha}(1 + \sqrt{1 + 4\alpha T_0/W}).$$

Gabarito

1. 40%

2. $W = mc(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$

3. Demontração. Tente imaginar uma máquina que entre em contradição (demosntre por absurdo).

4. $T' = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

5. a)$\Delta S = 0$ b) $\Delta S = NK_bLn2(2)$ c) $\Delta S = NK_bLn\left(\frac{(V_1+V_2)^2}{V_1V_2}\left(\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right)^3\right)$

6. $\eta = 1 - 2T_3/(T_1 + T_2)$

7. $\eta = 16/97$

9. Sim. $T_{max} \approx 63^oC$

8. a) Use $U = U(T, V)$
b) $c_p - c_v = \frac{R}{1-2\alpha(1-b/V)^2/VRT}$.
c)$c_v = c$; $c_p = c + \frac{R}{1-2\alpha(1-b/V)^2/VRT}$.

10. Demonstração. Utilize a identidade $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A = -\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B$

11. Demonstração. Mostre que essa tinta fere a 2ª lei.

12. Demontração.

13. $T = (1/64)^{1/4}T_{sol}$

14. a) $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$, $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$
b) $H = U + pV$, $F = U - TS$, $G = U + pV - TS$
.
c) $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$, $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$, $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$, $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$, $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$, $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$
e) $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$, $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

15. a) $dU_0 = -dU = T_0dS_0 - p_0dV_0$
b)$dU + p_0dV - T_0dS \leq 0$
d) $dH \leq 0$, $dG \leq 0$, $dF \leq 0$

16. $T = \frac{T_1+T_2+T_3}{3}$

17. Em primeira aproximação, $T(r,\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} - (r - a^3/r^2)(\frac{T_1-T_2}{d})cos\theta$

18. a) discussão qualitativa
b)$\sqrt{T_1/T_2}$
c)T_1/T_2

19. Demonstração.

20. a) $V_L = \frac{n_LT_{L_0}V}{n_LT_{L_0}+n_RT_{R_0}}$ e $V_R = \frac{n_RT_{R_0}V}{n_LT_{L_0}+n_RT_{R_0}}$
b) $\Delta T = \Delta T_0e^{-ct}$, onde $c = \frac{2k}{5R}(\frac{n_R+n_L}{n_Rn_L})$

21. Demonstração