FOICE - LISTA 3

Davi Maciel ***Versão: 25 de janeiro de 2020***

1 Dona Aranha

A Dona Aranha subiu pela parede e fez sua teia no formato de um hexágono regular de lado $l = 45\ cm$ (Figura 1) e fixou as pontas dos fios radiais de raio $r = 10\ \mu m$ de tal maneira que a tensão em cada fio acabou sendo $F_0 = 6,0\ mN$. Assuma que a deformação do fio é elástica e que o módulo de Young é $E = 2,0 \cdot 10^8\ Pa$. Um fio rompe quando a deformação relativa excede $\epsilon_{max} = 0,2$.

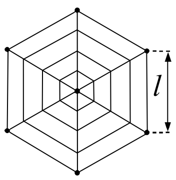

Figura 1: Problema 1

a) Determine a maior massa M de uma mosca na qual a teia não se rompe ao ser atingida a uma velocidade $v = 2,0\ m/s$. A mosca atinge o centro da teia perpendicularmente ao seu plano.

b) Uma mosca de massa $m = 0,10\ g$ ficou presa no centro da teia. Determine o período T de pequenas oscilações perpendiculares ao plano da teia. Uma vez na teia, uma mosca não consegue mais bater suas asas.

2 Não sei física básica

Um bloco de massa m está em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito; duas molas idênticas com a mesma constante elástica k são presas ao bloco (Figura 2). A ponta esquerda da mola I é presa a uma parede. A ponta direita da mola II começa a ser puxada bem devagazin no tempo $t = 0$ a uma velocidade constante u. Em que momento o bloco vai ter uma velocidade u pela primeira vez? A que distância da posição inicial o bloco estará nesse momento?

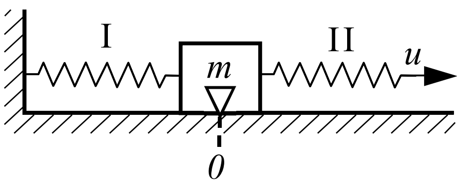

Figura 2: Problema 2

3 Foguetes do Timbas

Timbas fez uma pesquisa com novos foguetes sonoros em um campo militar. Um foguete voando a uma velocidade constante v emite um som a uma frequência constante f_0. Timbas usou sensores de frequência para registrar o som. A velocidade do som no ar é $c = 330\ m/s$.

a) Qual frequência vai ser registrada por um sensor se um foguete está indo em direção a ele? Qual frequência vai ser registrada por um sensor distante de um foguete se existe um ângulo φ entre a velocidade do foguete e a direção do sensor?

b) Enquanto fazia sua pesquisa, Timbas acidentalmente disparou um foguete defeituoso o qual começou a voar em um circulo de raio r a uma baixa altura acima do solo e com a mesma velocidade v. O foguete foi controlado com sucesso e Timbas notou uma dependência temporal da frequência do som recebida pelos sensores 1 e 2 a qual foi registrada em um gráfico. Use o gráfico (Figura 3) para ajudar Timbas a determinar a distância L entre os sensores.

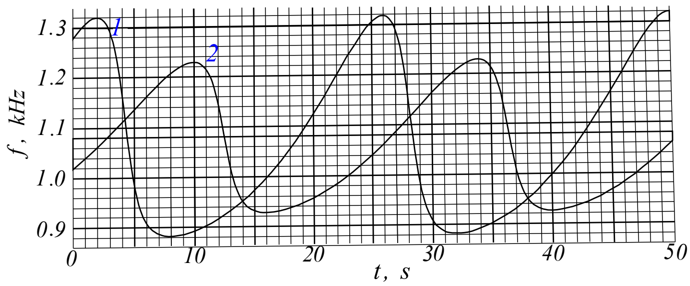

Figura 3: Problema 3

4 Circuitão

Quando ondas senoidais se propagam em uma malha LC infinita (Figura 4), a fase da voltagem através de dois capacitores sucessivos difere de φ.

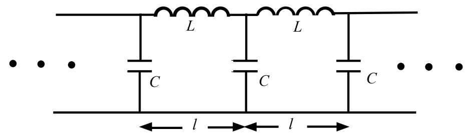

Figura 4: Problema 4

a) Determine como φ depende de ω, L e C (ω é a frequência angular da onda senoidal).

b) Determine a velocidade de propagação das ondas se o comprimento de cada unidade é l.

c) Diga sobre que condições a velocidade de propagação das ondas é quase independente de ω. Determine a velocidade nesse caso.

d) Sugira um modelo mecânico simples o qual é uma analogia ao circuito estudado e apresente equações que estabeleçam a validade do seu modelo.

5 Pêndulo duplo

Um pêndulo é constituído por uma casca esférica de paredes finas e raio R cheia de água suspensa ao ponto O (Figura 5) por uma haste leve rígida. A distância entre o ponto O e o centro da casca esférica é l. Por quantas vezes o período de pequenas oscilações desse pêndulo vai mudar depois que a água congelar? A viscosidade da água e a variação de volume devido ao congelamento podem ser desprezadas.

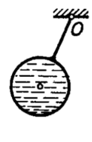

Figura 5: Problema 5

6 Vila Oculta do Som

Parte A

Vamos estudar a propagação de uma onda harmônica longitudinal plana num meio qualquer.

a) Derive a fórmula geral da velocidade de propagação do som num meio qualquer. Tendo feito isso, expresse esse resultado em termos de parâmetros adequados para um gás, um líquido e um sólido.

b) Considere que uma onda desse tipo se propaga em um meio com densidade ρ_0. A velocidade de propagação da onda é v. Assumindo que as variações de densidade do meio, causadas pela onda, são pequenas ($\Delta\rho \ll \rho$), demonstre que a variação de pressão no meio é

$$p = -\rho_0 v^2 (\partial u/\partial x),$$

onde $\partial u/\partial x$ é a deformação relativa.

c) Demonstre também que a intensidade da onda é

$$I = \frac{p_A^2}{2\rho_0 v},$$

onde p_A é a amplitude da oscilação da pressão.

Parte B

Um terremoto é composto, basicamente, por 4 tipos de ondas, são elas: **ondas P** (ou primárias), que são ondas longitudinais e também as mais rápidas; **ondas S** (ou secundárias), que são ondas transversais; **ondas de Rayleigh**, essas ondas são o resultado da interferência de ondas P e S, são ondas que se propagam na superfície semelhantemente as ondas do mar, estas também são as mais lentas e tem velocidades típicas de 1 até 5 km/s; **ondas de Love** são o resultado da interferência de duas ondas S, são ligeiramente mais rápidas que as ondas de Rayleigh, são ondas cisalhantes altamente destrutivas. Sabendo que o módulo de cisalhamento, ou módulo de rigidez, é dado por

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/h} = \frac{F/A}{\tan\theta},$$

ondes os parâmetros acima estão representados na Figura 6.

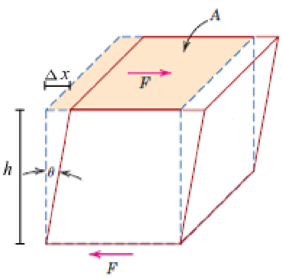

Figura 6: Problema 6 Parte B

Com isso em mãos, deduza a fórmula da velocidade das ondas S. Use ρ para a densidade do meio.

7 Herege

Um rapaz sapeca da década de 50 mantinha contato com duas moças (formosas) através de ondas de rádio. Ele posicionou um aparato ao ar livre de tal maneira que quando a moça que morava na cidade A recebia um sinal de interferência máxima, a moça que morava na cidade B não recebia sinal e vice versa. O aparato é constituído de duas barras verticais transmitindo com a mesma intensidade uniformemente em todas as direções no plano horizontal.

a) Encontre os parâmetros do aparato, isto é, a distância entre as barras, sua orientação e a diferença de fase entre os sinais elétricos fornecido às barras, de tal modo que a distância entre as barras é mínima.

b) Encontre a solução numérica se o rapaz tinha uma estação de rádio transmitindo a 27 MHz e construiu o aparato em Caucaia. Usando o mapa, ele achou que os ângulos entre a direção sul e a direção de A (São Paulo) e de B (Teresina) são 23° e 63°, respectivamente.

8 Corda bamba

Nessa questão, todos os movimentos oscilatórios são considerados pequenos. Como mostrado na Figura 7, uma corda de massa m e comprimento l com tensão τ tem uma massa M amarrada na sua ponta. A massa M pode deslizar numa direção vertical em uma barra lisa em $x = l$. O formato da corda é descrito por uma função $y(x,t)$. A corda é fixada na origem, ou seja, $y(0,t) = 0$.

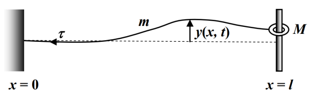

Figura 7: Problema 8

a) Primeiro assuma que a massa M está fixa em $y = 0$. Escreva a solução geral $y(x,t)$ das ondas estacionárias na corda. Expresse sua resposta em termos dos parâmetros dados e de constantes arbitrárias.

b) Agora assuma que a massa M pode deslizar. Qual é a condição de contorno para $y(x,t)$ em $x = l$?

c) Escreva uma equação para as frequências das ondas estacionárias na corda quando a massa M é livre para deslizar.

d) Se $m \ll M$, encontre as duas menores frequências de modo normal.

e) Para $m \ll M$, calcule a razão da energia cinética da corda pela da massa M na menor frequência de modo normal.

f) Se $m \gg M$, encontre as duas menores frequências de modo normal.

g) Para $m \gg M$, calcule a razão da energia cinética da corda pela da massa M na menor frequência de modo normal.

h) Um pulso de frequência angular ω é gerado perto da ponta $x = l$. Ele se propaga em direção a massa M e é refletido com uma diferença de fase de $\pi/2$. Qual é o valor de ω em termos de τ, m, M e l?

9 Refração Negativa

Para uma onda $A = A_0 \cos(kx - \omega t)$, onde $\omega = ck$, c é a velocidade da onda. Para materiais convencionais, c é quase uma constante, então k cresce com o aumento de ω. Contudo, para alguns materiais extraordinários, c é uma forte função de ω, tanto que k decresce com o aumento de ω. Tal fenômeno é chamado de Refração Negativa. É como ter um índice de refração que é negativo. Considere uma malha infinita de indutores e capacitores (Figura 8). O comprimento de cada segmento LC é a.

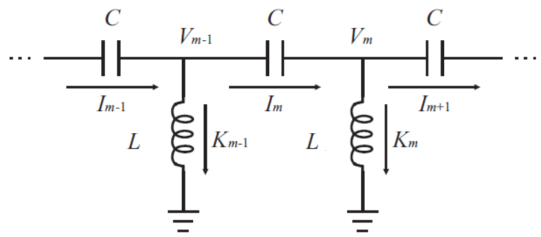

Figura 8: Problema 9

a) Encontre uma equação que relaciona $V_{m-1}(t)$, $V_m(t)$ e $V_{m+1}(t)$.

b) Suponha uma solução semelhante a uma onda $V_m(t) = V_0 e^{i(\omega t - mka)}$, encontre a relação entre ω e k.

c) A resposta do item anterior implica Refração Negativa?

10 Campo complexo

O campo elétrico de uma onda eletromagnética (EM) é $\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)}$, onde E_0 é uma constante real, e $\omega = \frac{c}{\tilde{n}} k$. Aqui, ω é real, c é a velocidade da luz no vácuo, e $\tilde{n}$ é o índice de refração complexo do meio.

a) Discuta brevemente o que vai acontecer com a amplitude da onda EM enquanto ela se propaga no meio se $\tilde{n}$ é real, imaginário ou complexo.

b) Encontre o campo magnético $\vec{B}$ e a média do vetor de Poynting ao longo de um período.

c) A quantidade $q = \dfrac{d < \vec{S} >}{dz}$ descreve a perda de energia da onda eletromagnética para o meio. Calcule q e discuta brevemente os significados físicos dos resultados se $\tilde{n}$ é real, imaginário, ou complexo.

d) A respeito do resultado anterior, uma onda EM que diminui em amplitude enquanto se propaga sempre perde energia para o meio?

11 Dioptro plano avançado

Um dioptro plano em $y = 0$ separa dois meios não magnéticos com índices de refração n_1 (real) e n_2 (pode ser complexo). Uma onda eletromagnética $\vec{E}_I = E_0 \hat{x} e^{i(k_1 y - \omega t)}$ incide no dioptro, e suas ondas refletida e transmitida são dadas por $\vec{E}_R = E_r \hat{x} e^{i(-k_1 y - \omega t)}$ e $\vec{E}_T = E_t \hat{x} e^{i(k_2 y - \omega t)}$, respectivamente.

a) Use as condições de contorno dos campos elétricos e magnéticos para encontrar $r = E_r/E_0$ e $t = E_t/E_0$ em termos de n_1 e n_2.

b) Para $n_1 = 1$, $n_2 = 2i$, onde $i = \sqrt{-1}$, encontre o coeficiente de reflexão $R \equiv |r|^2$.

c) Para $n_1 = 1$, $n_2 = 1 + 2i$, encontre a diferença de fase da onda refletida relativa a onda incidente.

12 Efeito Casimir

Casimir propôs na década de 50 que o vácuo é, na verdade, preenchido com ondas eletromagnéticas virtuais, e as energias armazenadas no vácuo produzem uma força observável entre duas placas metálicas separadas por distância d. A energia eletromagnética armazenada entre as placas é dada na Mecânica Quântica por $E = \frac{1}{2} \sum_{n<p} E_n$, onde $E_n = \hbar c k_n$, c é a velocidade da luz, p $(>> 1)$ é um grande número que depende das propriedades do material das placas. $k_n \equiv 2\pi/\lambda_n$, onde λ_n é o comprimento de onda de uma onda eletromagnética estacionária que existe no espaço entre as placas.

a) Assuma que as ondas tomam a forma de $\operatorname{sen} k_n x$, quais são os possíveis valores de k_n tais que as amplitudes das ondas são nulas em $x = 0$ e $x = d$?

b) Mostre que a força eletromagnética do vácuo é da forma a/d^2. Encontre a constante a.

c) Qual é a força devido as ondas eletromagnéticas do vácuo fora das placas?

d) Encontre o valor numérico dessa força quando $d = 1,00$ mm. Use $p = 2000$.

13 Terremoto numa bolha

Estime o tempo necessário para uma pertubação se propagar do seu ponto de origem para o ponto diametralmente oposto na superfície de uma bolha de sabão de raio $R = 2,00\ cm$. Use $\gamma = 2,50 \cdot 10^{-2}\ N/m$ para o valor da tensão superficial, $\rho = 1,00 \cdot 10^3\ kg/m^3$ para o valor da densidade e $e = 10,0 \mu m$ para a espessura da película.

14 Shallow now

Encontre a velocidade de propagação de pequenas ondas na água rasa. A água é considerada rasa se o comprimento de onda é consideravelmente maior que a profundidade da água. Graças a isso, nós podemos assumir que ao longo de uma secção transversal vertical a velocidade horizontal de todas as partículas é a mesma e que a velocidade vertical das partículas de água é significantemente menor do que a velocidade horizontal. o fato de a onda ser pequena quer dizer que o módulo da variação da sua altura é muito menor que a profundidade da água.

Respostas

1- **a)** $M = \dfrac{6l\left[(\epsilon_{max}E\pi r^2)^2 - F_0^2\right]}{v^2(F_0 + E\pi r^2)} = 1,2\ g$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{6F_0}} \approx 0,22\ s$

2- $\Delta t = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$; $x = u\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

3- **a)** $f_{max} = \dfrac{f_0}{1 - v/c}$; $f = \dfrac{f_0}{1 - (v/c)\cos\varphi}$

b) $L = 478\ m$

4- **a)** $\varphi = 2\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\dfrac{\omega\sqrt{LC}}{2}\right)$ com $0 \leq \omega \leq \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$

b) $v = \dfrac{l}{\Delta t} = \dfrac{\omega l}{\varphi}$

c) $\omega \ll \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$; $v_0 = \dfrac{l}{\sqrt{LC}}$

d) Molas de comprimento natural desprezível e massas em série. As fórmulas podem ser obtidas através da comparação entre as energias totais dos sistemas: $\dot{q}_n \to v_n$; $q_n \to x_n$; $L \to m$; $C \to k^{-1}$.

5- Irá aumentar em $\sqrt{1 + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{R}{l}\right)^2}$. Foi considerado que o pêndulo com água líquida se comporta como um pêndulo matemático.

6- Parte A

a) $v = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_0}$; para um gás: $v = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$; para um líquido e para um sólido: $v = \sqrt{B/\rho_0}$, onde B é o módulo de Bulk, ou módulo de compressibilidade volumétrica.

Parte B

$V_S = \sqrt{\dfrac{G}{\rho_0}}$

7- **a)** $a = \dfrac{\lambda}{4\,\mathrm{sen}(\varphi/2)}$; onde φ é o angulo entre as cidades das moças; a perpendicular ao segmento que liga as antenas deve estar na bissetriz. A diferença de fase é $\varphi = (2q+1)\pi/2$, onde q é um inteiro qualquer.

b) $\lambda = c/f = 11,1\ m$; $\varphi = 40°$; $a = 8,1\ m$ a perpendicular ao segmento que liga as antenas deve fazer um ângulo de 43° com o sul.

8- **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{sen}\, k_n x \,\mathrm{sen}\, \omega_n t$, onde $k_n = \dfrac{n\pi}{l}$ e $\omega_n = k_n\sqrt{\dfrac{\tau l}{m}}$

b) $M\dfrac{\partial^2 y(l,t)}{\partial t^2} = -\tau\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}$

c) $\dfrac{\omega l}{c}\tan\dfrac{\omega l}{c} = \dfrac{m}{M}$

d) $\omega = \sqrt{\dfrac{\tau}{Ml}}$; $\omega = \pi\sqrt{\dfrac{\tau}{ml}}$

e) $\dfrac{m}{3M}$

f) $\omega = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\tau}{ml}}$; $\omega = \dfrac{3\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\tau}{ml}}$

g) $\dfrac{m}{2M}$

h) $\omega = \dfrac{1}{M}\sqrt{\dfrac{m\tau}{l}}$

9- **a)** $\omega^2 LC(V_{m-1} + V_{m+1}) = V_m(2\omega^2 LC - 1)$

b) $\omega = \dfrac{1}{2\sqrt{LC}\,\mathrm{sen}(ka/2)}$

c) Só não implica é pouco.

10- **a)** Tome $k = \dfrac{\omega}{c}(a + bi)$, substituindo:
$\vec{E} = E_0 e^{-b\omega z/c}\hat{x}e^{i\omega(az/c - t)}$.
Se $k = \dfrac{\omega a}{c}$, teríamos: $\vec{E} = E_0\hat{x}e^{i\omega(az/c-t)}$.
Se $k = \dfrac{\omega bi}{c}$, teríamos: $\vec{E} = E_0 e^{-b\omega z/c}\hat{x}e^{-i\omega t}$.

b) $\vec{B} = \dfrac{1}{i\omega}\nabla \times \vec{E} = \dfrac{1}{c}(a + bi)E_0 e^{-b\omega z/c}\hat{y}e^{i\omega(az/c-t)}$

c) $q = -\dfrac{ab\omega}{\mu_0 c^2}E_0^2 e^{-2b\omega z/c}$.
Se $a = 0$ ou $b = 0$, então $q = 0$

d) Não. Quando $a = 0$ mas $b \neq 0$, a amplitude da onda muda, mas $q = 0$.

11- **a)** $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$; $t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$

b) $R = 1$

c) 45°

12- **a)** $k_n = \pi n/d$, onde n é um inteiro não negativo.

b) $a = \pi c\hbar p^2/4$

c) $d = \infty$, então $F = 0$.

d) $F = 9,90 \cdot 10^{-14}\ N$

13- $\Delta t = \pi R\sqrt{\dfrac{\rho e}{2\gamma}} = 28,1\ ms$

14- $u = \sqrt{gH}$