

# Lista FOICE: Mecânica

Rafael Prado

Outubro 2019

## 1 \*\* Barra presa

A uniform bar with mass  $m$  and length  $l$  hangs on four identical light wires. The wires have been attached to the bar at distances  $l/3$  from one another and are vertical, whereas the bar is horizontal. Initially, tensions are the same in all wires,  $T_0 = mg/4$ . Find tensions after one of the outermost wires has been cut.

## 2 \*\* Geometria

A slippery cylinder with radius  $R$  has been tilted to make an angle  $\alpha$  between its axis and the horizontal. A string with length  $L$  has been attached to the highest point  $P$  of some cross-section of the cylinder, the other end of it is tied to a weight with mass  $m$ . The string takes its equilibrium position, how long ( $l$ ) is the part not touching the cylinder? The weight is shifted from its equilibrium position in such a way that the shift vector is parallel to the vertical plane including the cylinder's axis; what is the period of small oscillations?

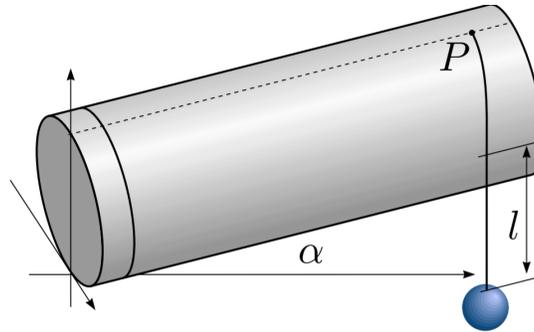


Figure 1: Cilindro inclinado

### 3 \*\* Palitos

Four long and four half as long rods are hinged to each other forming three identical rhombi. One end of the contraption is hinged to a ceiling, the other one is attached to a weight of mass  $m$ . The hinge next to the weight is connected to the hinge above by a string. Find the tension force in the string.

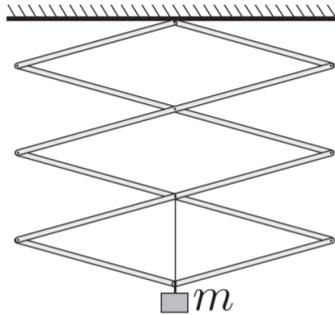


Figure 2: Sistema com palitos em forma de losângulo

### 4 \*\* Orbita espiral

Uma partícula se move em duas dimensões sobre a influência de uma força central determinada pelo potencial  $V(r) = \alpha r^p + \beta r^q$ . Encontre as potências  $p$  e  $q$  que tornam possível uma órbita espiral da forma  $r = c\theta^2$ , onde  $c$  é uma constante.

### 5 \*\* Órbita diferente

1. Encontre a força central que resulta na seguinte órbita para uma partícula de massa  $m$  e momento angular  $L$ :

$$r = a(1 + \cos \theta) \quad (1)$$

2. Uma partícula de massa  $m$  sente uma força atrativa cujo potencial é dado por  $U = -C/r^4$ . Encontre a seção transversal necessária para que a partícula vindo do infinito com uma velocidade inicial  $v_\infty$  seja capturada.

### 6 \*\*\* Para a origem e além

Considere uma partícula de massa  $m$  se movendo em duas dimensões entre duas paredes perfeitamente refletoras que se cruzam em um ângulo  $\chi$  na origem (figura abaixo). Assuma as colisões com as paredes elásticas e que não há atrito

entre partícula e parede. A partícula é atraída para a origem por um potencial  $U(r) = -c/r^3$ , onde  $c$  é uma constante.

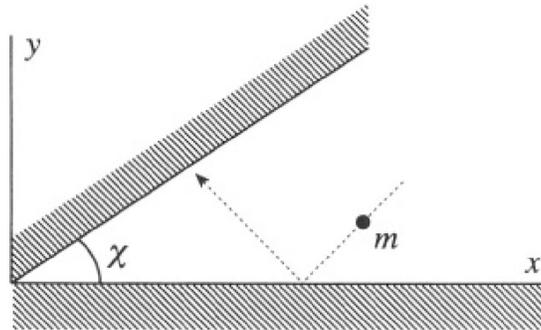


Figure 3: Massa colidindo com paredes

A partícula começa a uma distância  $R$  da origem no eixo  $x$  com um vetor velocidade  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ . Assuma  $v_y \neq 0, v_x < 0$ .

1. Determine a equação para a distância mais próxima que a partícula chega da origem.
2. Sobre quais condições a partícula chegará na origem?
3. Sobre quais condições ela irá escapar para o infinito?

## 7 \*\* Tchau sistema solar

Encontre a velocidade de escape do sistema solar em relação à Terra, considerando as influências gravitacionais mais relevantes sendo do Sol e da Terra (só um modelo simplificado). Considere o movimento de translação da Terra ao redor do Sol, mas desconsidere sua rotação. Aproxime a massa da Terra como muito maior que a do objeto sendo lançado (Pode usar quais constantes achar necessárias). Uma resposta incorreta comum é  $13,5 \text{ km/s}$ .

## 8 \*\* Duas massas e uma mola

Uma massa  $m_1$  com velocidade inicial  $v_0$  colide com um sistema massa-mola de massa  $m_2$ , inicialmente em repouso e com a mola no seu comprimento natural. A mola não tem massa e possui constante elástica  $k$ . Não há atrito.

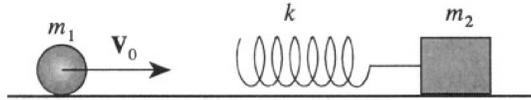


Figure 4: Duas massas e uma mola

1. Qual é a máxima compressão da mola?
2. Se depois de muito tempo da colisão os dois objetos se movem na mesma direção, quais são as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  de  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente?

## 9 \*\*\*\* Três massas e uma mola

Uma bola de  $M$  se movendo com velocidade  $v_0$  em uma mesa sem atrito colide com a primeira de duas bolas idêntias, cada uma de massa  $m = 2 \text{ kg}$ , conectadas por uma mola ideal de constante elástica  $k = 1 \text{ kg/s}^2$  (veja figura abaixo). Considere a colisão central, elástica, e instantânea.

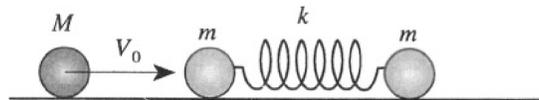


Figure 5: Três massas e uma mola

1. Encontre o menor valor da massa  $M$  para que ela consiga colidir com o sistema de duas bolas outra vez.
2. Quanto tempo irá passar entre as duas colisões?

## 10 \* Bolinha oscilando

Uma conta de massa  $m$  enfiada num aro vertical fixo de raio  $R$ , no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo  $\theta$  permanece pequeno (figura 6). Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule seu período.

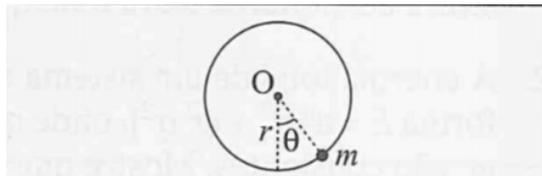


Figure 6: Bolinha oscilando em aro

## 11 \* Corda massiva na polia

Uma corda massiva de comprimento  $L$  e densidade de massa  $\sigma \text{ kg/m}$  está pendurada sobre uma polia sem massa. Inicialmente as extremidades da corda estão a uma distância  $x_o$  acima e embaixo da sua posição de equilíbrio. A corda é puxada com uma velocidade inicial  $v_o$ . Se o objetivo é que a corda nunca mais caia da polia, qual é o valor que  $v_o$  deve assumir? Considere que a corda é tal que a energia se conserva.

## 12 \*\* Tremendo a base

A block is situated on a slope with angle  $\alpha$ , the coefficient of friction between them is  $\mu > \tan \alpha$ . The slope is rapidly driven back and forth in a way that its velocity vector  $\vec{u}$  is parallel to both the slope and the horizontal and has constant modulus  $v$ ; the direction of  $\vec{u}$  reverses abruptly after each time interval  $\tau$ . What will be the average velocity  $w$  of the block's motion? Assume that  $g\tau \ll v$ .

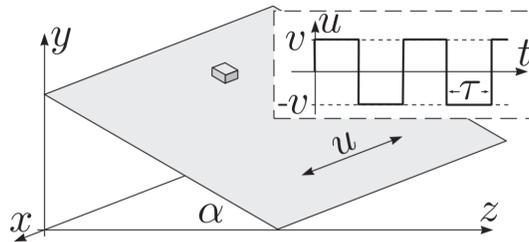


Figure 7: Base tremedeira

## 13 \*\*\* Bolona oscilando

Resolva o problema anterior (mostrar que é MHS, e calcular período de oscilação), mas agora com uma esfera maciça de raio  $r$  oscilando em uma calha cilíndrica de raio  $R$  (figura 8).

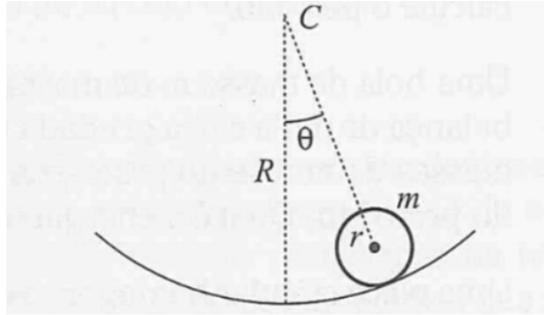


Figure 8: Bolona oscilando em calha cilíndrica

## 14 \*\*\* Barra oscilando

Um retângulo de altura  $2a$  e comprimento  $2b$  está sobre um cilindro de raio  $R$ , fixo em uma bancada. O momento de inércia do retângulo sobre seu centro de massa é  $I$ . O retângulo recebe uma batida infinitesimal e "rola" sobre a superfície do cilindro sem deslizar. Encontre a equação de movimento para o ângulo de inclinação do retângulo. Sobre quais condições ele vai cair do cilindro? Sobre quais condições ele fica oscilando no cilindro? Encontre a frequência de pequenas oscilações.

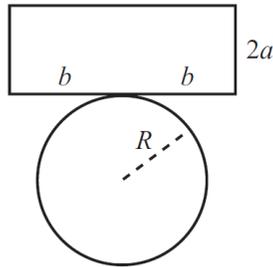


Figure 9: Retângulo oscilando em cilindro

## Gabarito

1.  $\frac{1}{12}mg, \frac{1}{3}mg, \frac{7}{12}mg$

2.  $l = L\pi R/2 \cos \alpha; T = 2\pi\sqrt{L/g}$

3.  $T = 3mg$

4.  $p = -3, q = -2$

5. (a)  $F(r) = -\frac{3L^2a}{mr^4}$

- (b)  $\sigma_{capture} = 2\pi\sqrt{\frac{2C}{mv_\infty^2}}$
6. (a)  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{c}{R^3} = \frac{mv_y^2 R^2}{2r_{cs}^2} - \frac{c}{r_{cs}^2}$
- (b) Se  $E > \frac{m^3 R^6 v_y^6}{54c^2}$ , ou  $E < \frac{m^3 R^6 v_y^6}{54c^2}$  e  $R < \left(\frac{3c}{mv_y^2}\right)^{1/3}$
- (c) Se  $E < \frac{m^3 R^6 v_y^6}{54c^2}$  e  $R > r_{ca}$
7.  $16,4 \text{ km/s}$
8. (a)  $x_{max} = v_o\sqrt{\mu/k}$ , onde  $\mu$  é a massa reduzida.
- (b)  $v_1 = v_o\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$ ;  $v_2 = v_o\frac{2m_1}{m_1+m_2}$
9. (a)  $M \approx 10 \text{ kg}$
- (b)  $\Delta t \approx 5 \text{ s}$
10.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$
11.  $v_o = x_o\sqrt{2g/L}$
12.  $v/\sqrt{\mu^2 \cot^2 \alpha - 1}$
13.  $\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$
14.  $a \geq R$ ;  $a < R$ ;  $\omega = \sqrt{\frac{mg(R-a)}{ma^2+I}}$