

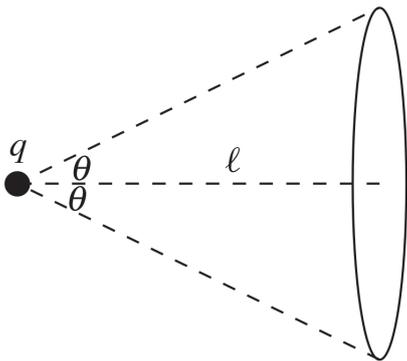
Force - Eletrostática

Italo

Janeiro de 2021

1 Não Integre! *

Uma carga de valor q está a uma distância l de uma placa circular carregada com uma densidade de carga constante e carga total Q , tal que a placa é vista por um ângulo 2θ pela carga, conforme na figura abaixo. Calcule o módulo da força exercida pela carga na placa.



2 Densidade de Energia

Demonstre diretamente que a fórmula para a Energia potencial elétrica relacionada com a interação de duas cargas pontuais q_1 e q_2 distantes R uma da outra ($U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$) é consistente com a densidade de energia armazenada em um campo elétrico: $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

Dica: Ao calcular a energia relacionada ao campo de uma carga pontual sozinha, obtém-se um valor infinito, mas ao calcular a energia de interação entre duas cargas, pode-se usar argumentos físicos para ignorar esses termos.

3 Potencial de um N-ágono *

Um polígono regular de N lados está carregado com uma densidade superficial de cargas constante e igual a σ . Calcule o potencial elétrico em relação ao infinito no centro desse polígono sabendo que o mesmo possui apótema a .

4 Método das imagens **

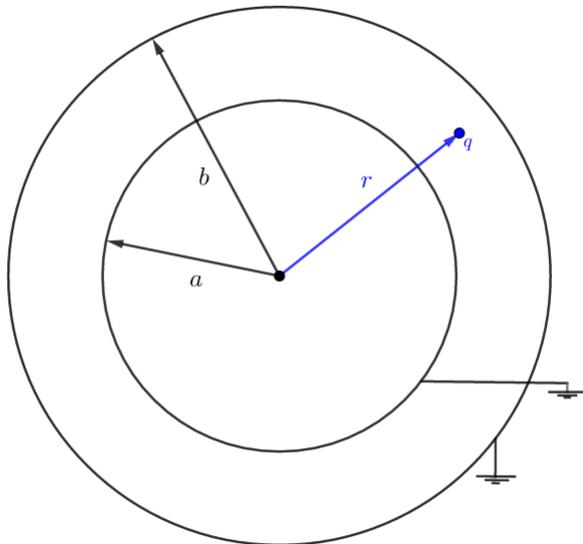
a) Uma casca esférica condutora de raio r está aterrada (possui potencial elétrico igual a zero) e uma carga elétrica pontual q está a uma distância a do centro da esfera, que pode ser maior ou menor que r . Mostre que se $a > r$ o potencial elétrico fora da esfera pode ser calculado ao incluir uma carga imagem dentro da esfera, enquanto se $a < r$, o potencial elétrico dentro da casca esférica pode ser calculado ao incluir uma carga imagem fora da esfera. Encontre o valor dessa carga e a posição da mesma no espaço.

b) Demonstre que em ambos os casos a carga induzida na casca esférica condutora será igual a carga imagem.

c) Forçando uma relação entre r e a , chegue no caso limite de um plano condutor aterrado.

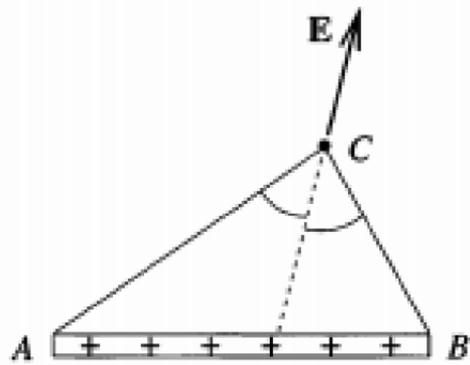
5 Método das imagens radicalizado ***

Dada uma configuração com duas cascas esféricas condutoras e aterradas de raios a e b com $a < b$ e uma carga pontual de valor q entre elas, encontre uma distribuição de cargas imagens que possa ser utilizada para calcular o valor do potencial elétrico entre as cascas esféricas e utilize essa distribuição para calcular o valor das cargas induzidas em ambas as superfícies.



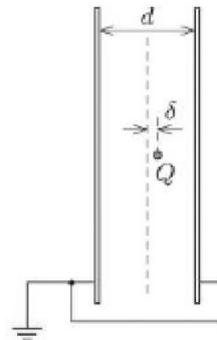
6 Qual é essa forma? ***

Um fio carregado finito de comprimento L possui densidade linear de cargas λ . Mostre que o campo elétrico em um ponto arbitrário do espaço, o campo elétrico aponta na direção da bissetriz do ângulo ACB (ver imagem). Qual o formato das equipotenciais geradas por essa distribuição de carga?



7 Método das Imagens Radicalizado 2 ***

Considere a situação da figura, em que há duas placas condutoras muito grandes e aterradas. Então, é colocada uma carga Q a uma distância $\delta \ll d$ do centro entre as placas, que por sua vez distam d uma da outra. Encontre uma boa estimativa para a força sentida pela carga Q .



8 Método das Imagens? Ou não? **

Uma esfera condutora neutra de raio R é imersa em um campo elétrico inicialmente constante de valor E_0 . Determine o vetor campo elétrico resultante em um ponto qualquer do espaço. Utilize essa informação para calcular a densidade superficial de carga na superfície da esfera. O que mudaria se a esfera estivesse carregada com uma carga Q ?

9 Mas o que é capacitância? ***

De maneira simplificada, costuma-se definir a capacitância C de um sistema em uma primeira abordagem de forma que $Q = C\Delta U$, sendo Q o módulo da carga elétrica em um dos componentes do sistema, que normalmente tem sinal oposto ao outro único componente, entretanto, essa definição é uma simplificação de um problema mais geral em que N corpos estão com seus potenciais elétricos definidos em relação a alguma superfície de referência, que pode ou não ser o infinito. Nesse problema mais geral, mostre através do princípio da superposição que as cargas desses corpos podem ser escritas da forma abaixo.

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + \dots + C_{1N}\phi_N \\ Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 + \dots + C_{2N}\phi_N \\ \dots \\ Q_N = C_{N1}\phi_1 + C_{N2}\phi_2 + \dots + C_{NN}\phi_N \end{cases} \quad (1)$$

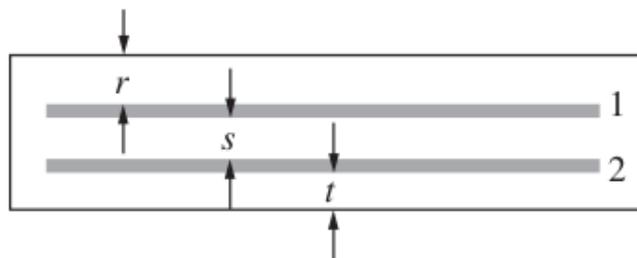
ou

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

ou, simplesmente:

$$Q = C\phi \quad (3)$$

sendo Q , C e ϕ as matrizes vistas anteriormente. Nessa generalização, os coeficientes da matriz C são os chamados coeficientes de capacitância. Nesse problema, você calculará os coeficientes de capacitância de um sistema físico simples: duas placas. Veja a imagem abaixo.



Supondo que a caixa tenha bordas com potencial zero e que as dimensões horizontais da caixa e das placas são muito maiores que r , s e t , determine os coeficientes de capacitância desse sistema.

10 Formatos e formatos *

Utilize a Lei de Gauss em seu formato integral e em seu formato diferencial para calcular os campos elétricos dentro das 3 distribuições de carga a seguir, sabendo que todas possuem a mesma densidade volumétrica de cargas constante ρ .

a) Um paralelepípedo com espessura l ao longo do eixo x e dimensões infinitas ao longo de y e z . Tome $x = 0$ como o plano intermediário do paralelepípedo.

b) Um cilindro de comprimento infinito e raio R .

c) Uma esfera de raio R .

d) Já que todas as configurações acima envolvem a mesma densidade de carga e a mesma equação diferencial $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, qual a razão da solução apresentar um formato diferente em cada um dos casos?

O divergente em coordenadas esféricas é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (4)$$

e o divergente em coordenadas cilíndricas é dado por:

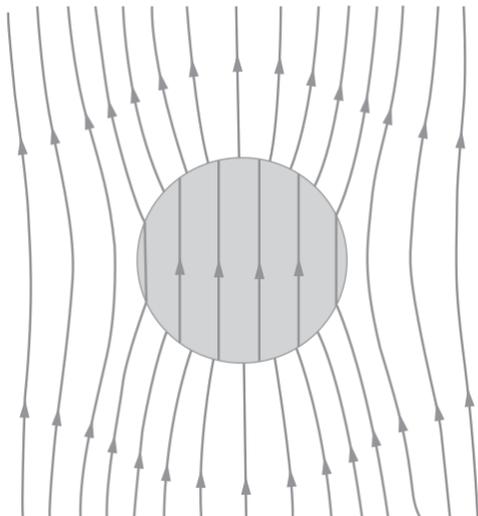
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5)$$

11 Básico na matéria *

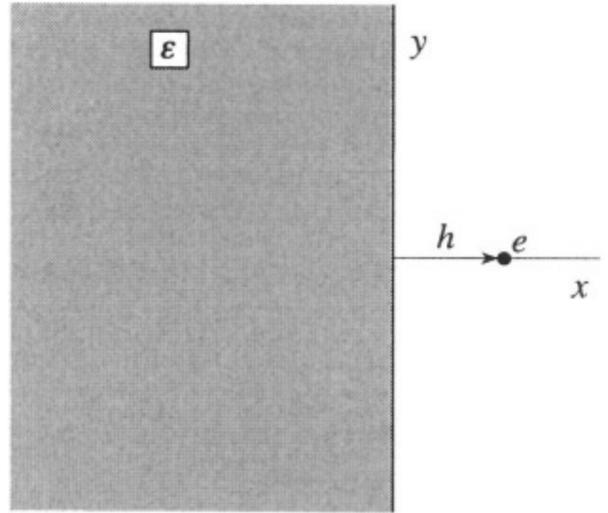
Uma esfera de raio R está isolada no espaço e possui uma polarização constante P . Calcule diretamente o valor do potencial elétrico e do campo elétrico em todo o espaço.

12 Parece Hidrodinâmica **

Uma esfera de raio R neutra e de constante dielétrica κ é posta em uma região com um campo elétrico constante e igual a E_0 , distorcendo as linhas de campo conforme na figura abaixo. Supondo que esse campo é gerado por um enorme capacitor de placas paralelas com todas as suas dimensões muito maiores que o raio da esfera R , considere o conjunto de linhas de campo que tangenciam a nossa esfera. Esse conjunto de linhas de campo chegam as placas do enorme capacitor em um círculo de raio r . Calcule r em termos de R e κ .



13 Mas... de novo? **



Uma carga e está situada no ponto $(h > 0, y, z)$ fora de um dielétrico homogêneo de permissividade relativa ϵ que cobre todo o espaço na região $x < 0$. Desenvolveremos ao longo dessa questão dois métodos para o cálculo do campo elétrico em todo o espaço, o primeiro sendo direto ao utilizar as condições de contorno do campo elétrico para calcular a densidade superficial de cargas na superfície do dielétrico, enquanto o segundo é mais indireto e utiliza as condições de contorno para encontrar uma distribuição de cargas pontuais que satisfaça as condições de contorno do problema e, portanto, pelo teorema da unicidade, resultem no mesmo campo elétrico.

13.1 Parte A

a) Escreva os campos elétricos $\vec{E}(0^+, y, z)$ e $\vec{E}(0^-, y, z)$ em função da carga e e da densidade de cargas superficial σ_b na superfície do dielétrico.

b) Escreva σ_b em função de $\vec{E}(0^-, y, z)$ somente.

c) Utilize as equações dos itens anteriores para encontrar uma expressão para σ_b em função de parâmetros conhecidos.

d) Encontre a força elétrica entre a carga e e a superfície do dielétrico.

13.2 Parte B

Para essa solução, iremos supor que o campo elétrico na situação desse problema pode ser calculado considerando duas distribuições de cargas distintas. A primeira distribuição, que é utilizada para calcular o campo elétrico na região com $x > 0$, se encontra no vácuo e é a da carga original e e uma carga e' na posição $(-h, 0, 0)$. A segunda distribuição, que é utilizada para calcular o campo elétrico na região com $x < 0$, se encontra em um dielétrico de permissividade relativa ε e é composta de uma única carga pontual e'' na posição $(h, 0, 0)$.

a) Utilizando essa configuração de cargas, escreva o vetor campo elétrico de um determinado ponto no espaço na posição \vec{r} .

b) Forçando as condições de contorno na superfície do dielétrico, encontre um sistema de equações para e' e e'' que garante que nossa distribuição de cargas gere uma solução para o problema original.

c) Resolva o sistema do item anterior. Com base nisso, calcule a força entre o dielétrico e a carga original e . Esse resultado coincide com o da parte A?

14 Só para finalizar...

Demonstre que ao utilizar o método das imagens para resolver o problema do potencial em um sistema com N condutores aterrados de formato genérico e uma carga real, pode-se obter a energia potencial eletrostática desse sistema como metade da energia de interação da carga real com as cargas imagens que resolvem o problema. Utilizando um argumento de simetria, demonstre que isso é verdade para o caso de um plano condutor infinito aterrado e uma carga.