Foice - Eletromagnetismo

Italo

Março de 2021

1 Resumo teórico

Equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

Potenciais:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla \phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \Box^2 \phi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \tag{2}$$

Soluções:

$$\begin{cases} \phi = \displaystyle\int \frac{\rho \left(\vec{r'}, t - \frac{\mathrm{r}}{c}\right) d\tau'}{4\pi\epsilon_0 \mathrm{r}} \\ \vec{A} = \displaystyle\int \frac{\mu_0 \vec{J} \left(\vec{r'}, t - \frac{\mathrm{r}}{c}\right) d\tau'}{4\pi \mathrm{r}} \end{cases} \tag{3}$$

2 Carga móvel ***

Uma carga pontual q se move com velocidade constante e igual a $\vec{v}$, de forma que sua posição pode ser dada por $\vec{w}\,(t) = \vec{v}t$. Nesse problema, encontraremos diretamente o potencial eletrostático e o potencial vetor gerado por essa carga, calculando então os campos elétricos e magnéticos gerados por tal.

a) Escreva as expressões para o valor de $\rho\,(\vec{r'},t)$ e $\vec{J}\,(\vec{r'},t)$ relativos a essa carga pontual.

b) Escreva as expressões para os potenciais retardados gerados por essa carga, deixe-as somente em função da integral abaixo.

$$\int \rho\,(\vec{r'}, t_r)\, d\tau' \tag{4}$$

c) Para calcular a integral acima, pode-se seguir dois caminhos. O primeiro caminho seria puramente matemático, e envolve a manipulação da "função"delta de Dirac. Outro caminho, seria utilizar um argumento físico para mostrar que integrais desse tipo, que envolvem mais de um instante de tempo devido ao tempo retardado, acabam acrescentando um fator multiplicativo quando comparadas a integral feita em um só instante de tempo, sendo esse fator multiplicativo independente do tamanho, e portanto válido para cargas pontuais. Se você quiser seguir o primeiro caminho, uma identidade útil é a seguinte:

$$\delta\,(f\,(x)) = \sum_i \frac{\delta\,(x - x_i)}{|f'\,(x_1)\,|} \tag{5}$$

sendo x_i as raízes da função f.

Caso queira seguir pelo segundo caminho, é útil considerar a situação do cálculo do comprimento aparente (ou seja, considerando o tempo que a luz leva para chegar em você) de um trem que se move com velocidade v.

Escolhendo qualquer uma dessas alternativas, calcule o valor da integral indicada no item anterior para a nossa carga q.

d) Utilize o resultado da integral, para calcular os potenciais retardados gerados pela carga pontual e, em seguida, utilize esses potenciais para encontrar o campo elétrico e o campo magnético.

e) Generalize a fórmula para os potenciais retardados para uma partícula com velocidade $\vec{v}$ qualquer e possivelmente variável com o tempo.

f) (****** Não faça!) Encontre a fórmula para o campo elétrico e magnético gerado por uma carga pontual nessa situação mais geral. As fórmulas devem coincidir com as indicadas abaixo.

3 Radiação meio carteada **

Considere uma carga q que se move com velocidade constante v_0 até um certo instante de tempo t, que vamos utilizar como $t = 0$, no qual a carga desacelera por um período de tempo muito curto τ até parar completamente. Calcule a potência emitida em forma de radiação eletromagnética pela carga nesse intervalo de tempo utilizando argumentos que envolvam a continuidade das linhas de campo elétrico e a velocidade máxima com que informação pode se propagar. Considere $v_0 << c$.

4 Oscilaçãozinha Leve **

Um solenoide com raio R possui n voltas por unidade de comprimento. A corrente que passa por esse solenoide varia com o tempo de acordo com a equação $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. O campo magnético dentro do solenoide, $B(t) = \mu_0 n I(t)$, muda então com o tempo.

a) Uma mudança no campo magnético causa um campo elétrico. Assumindo que B é dado por $B_0(t) = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)$, encontre o campo elétrico em um raio r dentro do solenoide.

b) Uma mudança no campo elétrico causa um campo magnético. Encontre o campo magnético (a uma distância r dentro do solenoide) causado pelo campo elétrico encontrado no item anterior. Mais precisamente, encontre a diferença entre o campo magnético no ponto a uma distância r e no eixo do solenoide. Nomeie essa diferença de $\Delta B(r,t)$.

c) O campo magnético não é igual a B_0 em todo o solenoide devido ao ΔB encontrado no item **b)**. Qual é a razão $\dfrac{\Delta B}{B_0}$? Explique porque a afirmação: "O campo magnético dentro do solenoide é essencialmente igual ao valor 'ingênuo' $nI_0 \cos(\omega t)$, desde que a mudança na corrente elétrica ocorra em uma escala de tempo longa quando comparado ao tempo que a luz leva para atravessar a lateral do solenoide.".

5 Isso funciona? *

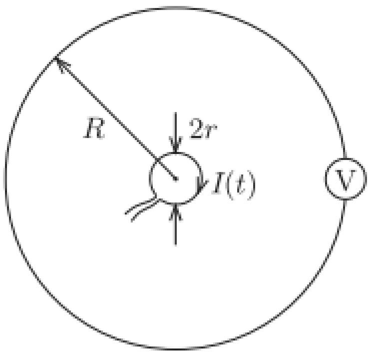
Usando o resultado do campo elétrico gerado por uma carga pontual se movendo com velocidade constante $\vec{v}$, calcule diretamente o fluxo elétrico através de uma esfera centrada na posição atual da carga.

6 Clássica *

Um papai noel de brinquedo está pendurando por um fio isolante e carregado com uma carga inicial Q_0. O meio ao redor do papai noel é ar, possuindo uma condutividade elétrica σ, que causará a descarga do papai noel. Calcule o tempo necessário para a carga do papai noel ser dividida por 2.

7 A ideia já viram*

Dois fios com formato circular de raios r e R com $r < R$ são concêntricos e estão no mesmo plano. A corrente elétrica no loop menor é aumentada aumentada uniformemente de 0 até um valor I_0 durante um intervalo de tempo t_0. Calcule a voltagem induzida no loop maior.



s

Figura 1: Fios circulares concêntricos e coplanares

8 Momento diferente **

Uma esfera de raio R possui uma polarização $\vec{P}$ constante e uma magnetização $\vec{M}$ também constante, mas não necessariamente na mesma direção. Encontre o momento linear armazenado no campo eletromagnético resultante.

9 Será que bate? **

Um fio isolante infinitamente longo com densidade de carga linear λ está em repouso ao longo do eixo z.

a) Encontre o campo eletrostático E_r no ponto P a uma distância x_0 da origem ao longo do eixo x.

b) No instante $t = 0$, o fio repentinamente começa a se mover com velocidade v na direção positiva do eixo z. Assumindo que o fio é infinitamente fino, escreva uma expressão para a densidade de corrente $\vec{J}$ decorrente do movimento. Usando a fórmula para o potencial retardado, calcule o valor de $A_z\,(x_0,t)$. Calcule o valor para $t > \dfrac{x_0}{c}$ e para $t < \dfrac{x_0}{c}$.

c) Por conta da simetria cilíndrica do sistema, sabemos na realidade $A_z\,(s,t)$ com s sendo a coordenada radial em coordenadas cilíndricas. Encontre $\vec{B}\,(s,t)$ e calcule o seu limite para $t \to \infty$. Esse valor coincide com o valor conhecido da magnetostática?

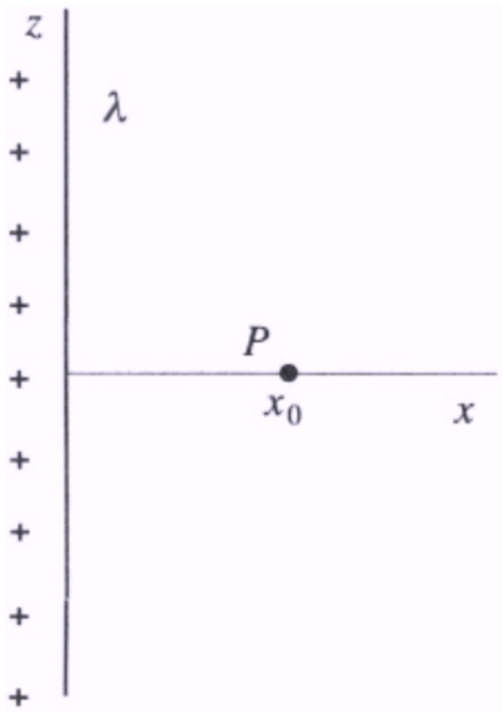


Figura 2: Fio infinito

10 $\vec{E}$ morreu **

Encontre a equação de onda para o campo elétrico em um meio com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ_0. Encontre baseado nessa equação o comprimento característico da atenuação nesse meio λ_t, ou seja, o comprimento pelo qual a propagação de uma onda plana implica na redução da amplitude por um fator e. Utilize σ para a condutividade elétrica do meio.